Klassifikation
der Oberflächen zweiten Grades
bei Cauchy, Plücker, Hesse.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hermann Paepcke

aus Wesenberg i. M.

Rostock.

Carl Boldt'sche Hof-Buchdruckerei.

1904.

Referent: Herr Professor Dr. **O. Staude.**

Benutzte Literatur.

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Auflage. Leipzig 1901.

Pierre Fermat. Varia opera mathematica. Tolosae 1679.

L. Schlesinger. Die Geometrie von R. Descartes. Berlin 1894.

R. Descartes. La géométrie. Paris 1664.

Oeuvres de Fermat; herausgegeben von P. Tannery und Ch. Henry. Band 1. Isagoge ad locos ad superficiem. Paris 1891.

Chr. Huygens. Horologium oscillatorium. Parisiis 1673.

Jakob Bernoulli. Opera. Genevae 1744.

Joh. Bernoulli. Opera omnia. Band 4. Lausannae et Genevae 1742.

A. Parent. Essais et recherches de mathématique et de physique. Band 2. Paris 1713.

M. Clairaut. Recherches sur les courbes à double courbure. Paris 1731.

Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1731, pag. 483—493. Paris 1764.

L. Euler. Introductio in analysin infinitorum. Lausannae 1748.

A. L. Cauchy. Exercices de Mathématiques. Troisième année: Sur les centres, les plans principaux et les axes principaux des surfaces du second degré. Discussion des surfaces du second degré. Paris 1828.

R. Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. Auflage. Leipzig 1881.

J. Plücker. System der Geometrie des Raumes. 2. Auflage. Düsseldorf 1852.

Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 16. Band 1871. Göttingen 1872. Clebsch. Zum Gedächtnis an Julius Plücker.

O. Hesse. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. 2. Auflage. Leipzig 1869.

G. Cramer. Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. A Genève. 1750.

Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1764. A Paris 1767. Bézout. Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations.

Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1772, seconde partie. A Paris 1776. Laplace. Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Vandermonde. Mémoire sur l'élimination.

Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Année 1773. A Berlin 1775. Lagrange. Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice. Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires.

Gauß. Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae 1801.

Journal de l'école royale polytechnique. Cahier 17. A Paris 1815. Cauchy. Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment.

Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1875 und 1876. Prag 1877. Studnicka. A. L. Cauchy als formaler Begründer der Determinantentheorie. Prag 1876.

Clebsch-Lindemann. Vorlesungen über Geometrie. Band 2, 1. Teil. Leipzig 1891.

Einleitung.

Die Geschichte der Oberflächen zweiten Grades von Descartes bis Euler.

Wenn auch neuere Untersuchungen zu dem Resultat geführt haben, daß bereits einige Jahre vor Descartes ein anderer bekannter französischer Mathematiker, Fermat, den Gedanken gehabt hat, die Sätze der Algebra der Geometrie dienstbar zu machen, um durch die Verbindung der beiden Zweige der Mathematik geometrische Sätze zu beweisen und geometrische Aufgaben zu lösen[1]), sieht Cantor doch Descartes als den Entdecker der analytischen Geometrie an[2]), da er seine Gedanken früher als Fermat der Öffentlichkeit übergeben hat, und da die Geschichte dort, wo Erstlingsrechte zu vergeben sind, allein die Zeit der Veröffentlichung als maßgebend zu betrachten pflegt.

Indessen beschränkt sich Descartes in seiner „Géométrie" fast ganz auf die analytische Geometrie der Ebene; nur andeutungsweise und gleichsam verstohlen findet sich am Schluß des zweiten Buches des erwähnten Werkes ein Hinweis auf die analytische Geometrie des Raumes. Descartes sagt dort:[3])

---

[1]) Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band 2, pag. 816.

[2]) ebenda, pag. 811.

[3]) Descartes. La géométrie, pag. 74—75.

„Übrigens habe ich hier nur von solchen krummen Linien gesprochen, die man in einer ebenen Fläche beschreiben kann, aber man kann leicht das Gesagte auf alle diejenigen übertragen, die man sich durch regelmäßige Bewegung von Punkten im dreidimensionalen Raum entstanden denken kann. Fällt man nämlich von allen Punkten einer solchen Kurve Perpendikel auf zwei zueinander senkrechte Ebenen, so beschreiben die Fußpunkte derselben zwei andere Kurven, je eine in den beiden Ebenen, deren Punkte man auf die soeben erörterte Weise bestimmen kann, indem man sie auf die Punkte der Geraden bezieht, in der sich die beiden Ebenen schneiden; alsdann sind die Punkte der dreidimensionalen Kurve vollständig bestimmt. Will man z. B. eine Gerade ziehen, die die gegebene Kurve in einem gegebenen Punkte rechtwinklig schneidet, so braucht man nur zwei andere Gerade in den Ebenen zu bestimmen, welche die in der betreffenden Ebene gelegene Kurve in dem Fußpunkt des von dem gegebenen Punkte gefällten Perpendikels unter einem rechten Winkel schneidet. Legt man dann durch jede dieser beiden Geraden eine Ebene, die zu der Ebene, in welcher die betreffende Gerade liegt, senkrecht steht, so ist die Schnittlinie dieser beiden Ebenen die gesuchte Gerade."

Wenn in dieser Behauptung auch ein Irrtum liegt, insofern als sie in der Allgemeinheit nicht richtig ist, vielmehr nur dann zutrifft, wenn die Raumkurve eben ist, bleibt die Übertragung des Gedankens auf den Raum immerhin erwähnenswert und von Bedeutung.

Nachdem Descartes mit seinem Werke vor die Öffentlichkeit getreten war, beschäftigte sich auch Fermat eingehender mit dem neuen Zweige der Mathematik und fügte manches Neue zu den schon von Descartes gefundenen Ergebnissen hinzu[1]; doch auf den Raum dehnte auch er

---

[1]) Fermat. Varia opera mathematica.

die analytisch-geometrische Methode noch nicht aus. Zwar hat er sich, wie aus einem aus dem Jahre 1643 stammenden Brief an Carcavy[1]) hervorgeht, bereits mit Oberflächen zweiter Ordnung beschäftigt, indem er, nicht ganz fehlerfrei, die Kurven besprach, in welchen eine solche Oberfläche durch eine Ebene geschnitten wird, doch ohne die analytisch-geometrische Methode anzuwenden.

Die nächsten bedeutenden Forscher, die sich mit Oberflächen zweiten Grades beschäftigt haben, sind Huygens und Jakob Bernoulli. Ersterer schaltet in seinem im Jahre 1665 veröffentlichten Werke „horologium oscillatorium" bei der Betrachtung ebener Kurven einige unbewiesene Konstruktionen ein, die sich damit beschäftigen, den Flächeninhalt einer Oberfläche zweiten Grades als Flächeninhalt eines Kreises darzustellen[2]), während letzterer in seinem Werke „opera" [3]), das im Jahre 1696 erschien, eine Arbeit über die Komplanation konoidischer und sphäroidischer Oberflächen veröffentlicht. Doch in beiden Arbeiten werden Raumkoordinaten noch nicht eingeführt, und demgemäß wird eine Gleichung für die Oberflächen nicht aufgestellt.

Etwas später, in den Jahren 1697 und 1698, beschäftigte sich Johann Bernoulli, wie aus einem Briefwechsel mit Leibniz hervorgeht[4]), mit den kürzesten Linien auf den Oberflächen. Ist Bernoulli bereits damals zu der allgemeinen Gleichung für die kürzesten Linien gelangt, wie er sie am Ende des Jahres 1728 an Klingenstierna in Upsala in einer Abhandlung mitgeteilt haben will[5]), welche er aber erst 1742 in der Gesamtausgabe seiner Werke zum Druck gab[6]), ist damit der

---

[1]) Oeuvres de Fermat, Band 1, pag. 111—117.

[2]) Huygens. Horologium oscillat., pag. 73—77.

[3]) Jak. Bernoulli. Opera, Band II, pag. 739—744.

[4]) Cantor. Vorles. üb. Gesch. d. Math., Band 3, pag. 244.

[5]) vergl. ebenda, pag. 244.

[6]) Joh. Bernoulli. Opera, Band IV, pag. 108—128.

Beweis erbracht, daß Bernoulli schon 1698 Oberflächengleichungen mit Hülfe von drei Raumkoordinaten aufzustellen und zu behandeln wußte.

Cantor hält es für unwahrscheinlich[1]) und glaubt, daß das Verdienst, die ersten Gleichungen von Oberflächen in drei zueinander senkrechten Raumkoordinaten aufgestellt zu haben, eher dem französischen Mathematiker Antoine Parent zugeschrieben werden muß. Dieser beginnt seine Untersuchungen über die Oberflächen zweiten Grades[2]) mit der Tangentialebene der Kugel, für die er die Gleichung ableitet:

$$c^2 + y^2 - 2cy + b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + z^2 - 2az = r^2.$$

Unter Anwendung der analytischen Methode beweist er ferner den Satz, daß das Cylindroid, wie er das einschalige Rotationshyperboloid nennt, durch Umdrehung einer Geraden um eine andere so, daß beide in allen Lagen windschief zueinander liegen, erzeugt werden kann[3]).

Diese Entwickelungen setzt Clairaut fort; zu den schon von Parent gefundenen Ergebnissen, die er kurz wiederholt, fügt er neue hinzu: er stellt Gleichungen auf für den Kegel mit kreisförmiger Basis, das Paraboloid, für Rotationsflächen und allgemeine Kegelflächen[4]). Zum Schluß seiner Arbeit bemerkt er, daß man eine Vorstellung von der Gestalt der Oberfläche gewinne, wenn man die einzelnen Koordinaten in der Gleichung verschwinden oder unendlich groß werden lasse[5]). Von Interesse ist ferner, daß Clairaut die schon von Fermat behandelte Frage,

---

[1]) Cantor. Vorl. üb. Gesch. d. Math. III, pag. 244 und 418.

[2]) Parent. Essais et recherches de mathématique et de physique, Band II, pag. 181 ff.

[3]) ebenda, pag. 645 ff., besonders pag. 653.

[4]) Clairaut. Recherches sur les courbes à double courbure, pag. 8—15.

[5]) ebenda, pag. 35—39.

in welcher Kurve eine Oberfläche zweiten Grades von einer Ebene geschnitten wird, zuerst mit Hülfe der analytisch-geometrischen Methode zu beantworten sucht[1]).

Ein weiterer bedeutsamer Fortschritt in der Geschichte der Entwickelung der Oberflächen zweiten Grades findet sich in der „Introductio" von Euler, die sich in einem Anhang von sechs Kapiteln[2]) mit den Oberflächen beschäftigt. Im ersten Kapitel gibt Euler eine Definition der Oberflächen von Körpern überhaupt als solche krumme Flächen, die es im allgemeinen nicht gestatten, daß durch vier Punkte derselben eine Ebene gelegt werden kann; er führt das dreiaxige, rechtwinklige Raumkoordinatensystem ein und zeigt, wie eine Oberfläche als Versinnlichung einer Gleichung zwischen den Größen x, y, z zu betrachten sei, wenn diese die Längen der Koordinaten darstellen. Im zweiten Kapitel betrachtet er die Kurven, in denen eine Oberfläche von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, im dritten insbesondere die Schnitte des Zylinders, des Kegels und der Kugel mit einer Ebene. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit den Koordinatentransformationen eines rechtwinkligen Systems in ein beliebiges anderes rechtwinkliges System. Nach der Ableitung dieser vorbereitenden Formeln kann er dann im fünften Kapitel an die Lösung der uns hier vornehmlich interessierenden Aufgabe herantreten, die vor ihm noch niemand zu lösen versucht hatte, die allgemeine zehngliedrige Gleichung für die Oberflächen zweiten Grades zu diskutieren, die er in der Form annimmt:

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

Nachdem er den Asymptotenkegel der durch diese allgemeine Gleichung dargestellten Oberfläche betrachtet

[1]) Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris. Année 1731, pag. 483—493.

[2]) Euler. Introductio, pag. 323 ff.

hat, führt er unter Anwendung der im vorhergehenden Kapitel gewonnenen Transformationsformeln durch Drehung des Koordinatensystems um den Anfangspunkt und durch eine parallele Verschiebung desselben die ursprüngliche Gleichung über in:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2.$$

Aus der Form der Gleichung schließt Euler, daß der neugewählte Koordinatenanfangspunkt der Mittelpunkt der Oberfläche ist.

Eine Diskussion der allgemeinen Gleichung der Oberflächen zweiten Grades ist nach Euler wiederholt gegeben worden. Zu einer auch der äußeren Form nach vollkommensten Darstellungsweise haben erst die klassischen Untersuchungen Hesse's geführt. Daß aber schon Cauchy und Plücker eine vollständige Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades gegeben haben, wird aus den folgenden Ausführungen hervorgehen, wenn ihre Ergebnisse in der jetzt üblichen Schreibweise aufgeführt werden.

I. Die Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades bei Cauchy.

In seinen Abhandlungen über die Oberflächen zweiten Grades[1]) geht Cauchy aus von der allgemeinen Gleichung

$$1)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Jz = K.$$

Die Konstanten entsprechen bei der jetzt üblichen Schreibweise

$$1')\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

wo allgemein $a_{ih} = a_{hi}$ gesetzt wird, beziehungsweise den Größen a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, $-a_{44}$. Die Diskussion der Gleichung (1) beginnt er, indem er die Oberfläche mit einem System paralleler Geraden schneidet, eine Methode, die er, wie er selbst in der Einleitung[2]) seiner ersten Abhandlung sagt, unter den verschiedenen möglichen für eine der einfachsten hält.

Eine beliebige Gerade, die durch den Punkt ξ, η, ζ gelegt ist und mit den drei Koordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet, hat die Gleichungen:

$$2)\quad \frac{x-\xi}{\cos\alpha} = \frac{y-\eta}{\cos\beta} = \frac{z-\zeta}{\cos\gamma} \quad \text{oder}$$

$$2')\quad \begin{aligned} x &= \xi \pm r\cos\alpha, \\ y &= \eta \pm r\cos\beta, \\ z &= \zeta \pm r\cos\gamma, \end{aligned}$$

---

[1]) Cauchy. Exercices de Mathématiques, pag. 1—22 und pag. 82—120.

[2]) ebenda, pag. 1.

wenn $\pm r$ die Entfernung des laufenden Punktes x, y, z von dem festen ξ, η, ζ in dem einen oder andern Sinne ist. Werden die Werte (2′) für die Größen x, y, z in die Gleichung (1) resp. (1′) eingesetzt, so ergibt sich eine in r quadratische Gleichung

$$3)\quad s r^2 \pm 2 t r + u = K\text{[1]},$$

in der die neu eingeführten Konstanten die folgenden Werte[2] haben:

$$3')\left\{\begin{aligned} s &= a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\cos^2\beta + a_{33}\cos^2\gamma + 2a_{23}\cos\beta\cos\gamma \\ &\quad + 2a_{31}\cos\gamma\cos\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\cos\beta, \\ t &= (a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_{14})\cos\alpha + \\ &\quad (a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + a_{24})\cos\beta + \\ &\quad (a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta + a_{34})\cos\gamma, \\ u &= a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta \\ &\quad + 2a_{14}\xi + 2a_{24}\eta + 2a_{34}\zeta. \end{aligned}\right.$$

Die Auflösung der Gleichung (3) liefert zwei Werte für r, welche die Abstände des Punktes ξ, η, ζ von den Schnittpunkten der Geraden (2′) mit der Fläche (1) angeben. Die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte wird durch den Punkt ξ, η, ζ halbiert, wenn die Gleichuug (3) rein quadratisch ist, d. h. wenn

$$4)\left\{\begin{aligned} &(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma)\,\xi + \text{[3]} \\ &(a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma)\,\eta + \\ &(a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma)\,\zeta + \\ &\ a_{41}\cos\alpha + a_{42}\cos\beta + a_{43}\cos\gamma = 0 \text{ ist.} \end{aligned}\right.$$

Bei veränderlichen Werten ξ, η, ζ stellt die Gleichung (4) die Diametralebene der Richtung α, β, γ dar; aus ihr

---

[1]) Cauchy, pag. 2 und 3, (8) und (10).
[2]) ebenda, pag. 2, (7).
[3]) ebenda, pag. 3, (14).

ergeben sich als die Gleichungen für die Diametralebenen der Richtungen der Koordinatenaxen die folgenden:

$$5)\quad \begin{cases} a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_{14} = 0 \\ a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + a_{24} = 0 \\ a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta + a_{34} = 0 \end{cases}$$ [1]).

Da die Koordinaten des Schnittpunktes der Ebenen (5) der Gleichung (4) unabhängig von α, β, γ genügen, so folgt, daß alle Diametralebenen durch diesen Schnittpunkt gehen, der infolgedessen Mittelpunkt der Oberfläche genannt wird. Seine Koordinaten sind:

$$6)\quad \xi = \frac{A_{14}}{A_{44}},\ \eta = \frac{A_{24}}{A_{44}},\ \zeta = \frac{A_{34}}{A_{44}}$$ [2]),

wo A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44} Unterdeterminanten der Hauptdeterminante

$$7)\quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

sind. Diejenigen Axen, die zu ihren Diametralebenen senkrecht stehen, werden als die Hauptaxen definiert; diese müssen demnach den Bedingungen genügen:

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma}{\cos\alpha} = \\ \dfrac{a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma}{\cos\beta} = \\ \dfrac{a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma}{\cos\gamma} = s \end{cases}$$ [3]),

---

[1]) Cauchy, pag. 4, (19)—(21).

[2]) ebenda, pag. 91, (49).

[3]) ebenda, pag. 82, (6).

wenn s den unter (3′) angegebenen Wert hat. Aus den Gleichungen (8) ergeben sich die folgenden:

$$9)\quad \begin{cases} (a_{11} - s)\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma = 0 \; ^{1)} \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22} - s)\cos\beta + a_{23}\cos\gamma = 0 \\ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + (a_{33} - s)\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

und aus diesen folgt durch Elimination von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$10)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0 \; ^{2)}.$$

Da diese Gleichung in s vom dritten Grade ist, hat eine Oberfläche zweiten Grades drei Hauptaxen, deren Längen mit Hülfe der Gleichung (3) zu bestimmen sind, indem in diese der Reihe nach die sich aus der Gleichung (10) für s ergebenden Werte eingesetzt werden. Cauchy ist, wie er in der Einleitung zu seiner erstgenannten Abhandlung hervorhebt, der erste, der direkt nachweist, daß die Wurzeln der kubischen Gleichung (10) stets reell sind[3]. Indem er ferner die Möglichkeiten erwägt, daß eine oder zwei Wurzeln der Gleichung (10) verschwinden — die drei Wurzeln dürfen nicht gleich 0 werden, da dann die Gleichung (1) aufhört, vom zweiten Grade zu sein — und zwei oder drei derselben einander gleich werden, kommt er zu dem Ergebnis, daß alle Oberflächen zweiten Grades mindestens zwei Hauptebenen haben, die zu einander senkrecht stehen.[4] Da diese als die yz- und zx-Ebene gewählt werden können, folgt, daß jede allgemeine Gleichung (1) die Form annehmen kann:

$$11)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Jz = K.$$

---

[1] Cauchy, pag. 5, (25).
[2] ebenda, pag. 5, (26).
[3] ebenda, pag. 6—8.
[4] ebenda, pag. 83—85.

Den Zusammenhang zwischen den Konstanten der Gleichung (11) und denen der ursprünglichen (1) hebt Cauchy nicht hervor, da es ihm bei dieser ersten Klassifikation [1]), die im Folgenden wiedergegeben werden soll, nur darauf ankommt, festzustellen, welche Arten von Flächen zweiten Grades überhaupt existieren.

Er betrachtet nun weiter die spezielle Gleichung (11) und klassifiziert folgendermaßen:

a. $C \neq 0$. Durch Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes auf der z-Axe um die Größe $-\frac{J}{C}$ wird die Gleichung (11) übergeführt in:

$$12)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K.$$

b. $C = 0$, $J \neq 0$. Dadurch, daß der Anfangspunkt des Koordinatensystems um die Strecke $\frac{K}{2J}$ auf der z-Axe verlegt wird, geht die Gleichung (11) über in:

$$13)\quad Ax^2 + By^2 + 2Jz = 0.$$

Je nach den Vorzeichen ihrer Konstanten stellt die Gleichung (12) ein Ellipsoid, ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid dar, die Gleichung (13) ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid. In den Fällen, in denen die Fläche imaginär wird, sagt Cauchy zunächst: „Die Gleichung stellt nichts dar“ [2]), an anderer Stelle: „Sie stellt keine Fläche dar“ [3]); später gebraucht er indessen auch wiederholt die Bezeichnung „imaginäre Fläche“, jedoch nur für die Flächen, die ganz imaginär sind, d. h. für das imaginäre Ellipsoid, den imaginären Zylinder und das imaginäre parallele Ebenenpaar, während sich die Bezeichnungen „imaginärer Kegel“ und „imaginäres sich schneidendes Ebenenpaar“ nicht bei ihm finden; vielmehr

---

[1]) Cauchy, pag. 85—89.

[2]) ebenda, pag. 88 und 89.

[3]) ebenda, pag. 93 oben.

sagt er statt dessen „Punkt" und „Axe"[1]). Insbesondere liefern die vier ersten der aufgezählten Flächen Rotationsflächen, sobald zwei der Koëffizienten der quadratischen Glieder einander gleich werden; das Ellipsoid wird zu einer Kugel, wenn die drei Koëffizienten einander gleich werden.

Andererseits können eine, zwei oder drei der Konstanten der Gleichung (12) verschwinden; doch muß Cauchy besonders hervorheben, daß sie nur so verschwinden dürfen, daß die Gleichung vom zweiten Grade bleibt, da er homogene Koordinaten nicht einführt. Aus der Gleichung (12) ergeben sich folgende Fälle:

c. $K = 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$;

sind die Vorzeichen der Koëffizienten nicht alle einander gleich, stellt die Gleichung (12) einen Kegel, andernfalls den Koordinatenanfangspunkt dar.

d. ein Koëffizient verschwindet.

α. $K \neq 0$.

Je nach den Vorzeichen der Konstanten ist die Fläche (12) ein elliptischer, hyperbolischer oder imaginärer Zylinder.

β. $K = 0$.

Der Zylinder zerfällt in eine der Koordinatenaxen resp. in ein sich schneidendes Ebenenpaar.

e. zwei Koëffizienten verschwinden.

α. $K \neq 0$.

Die durch die Gleichung (12) dargestellte Fläche ist ein paralleles reelles oder imaginäres Ebenenpaar, je nachdem die Vorzeichen der von 0 verschiedenen Konstanten gleich oder verschieden sind.

β. $K = 0$.

---

[1]) Cauchy, besonders pag. 105.

Die beiden Ebenen fallen in einer der Koordinatenebenen zusammen. Cauchy betont besonders, daß nur eine Ebene erhalten wird, und stellt diesen Fall als Ausnahmefall hin [1]).

Ein letzter Fall ergibt sich schließlich aus der Gleichung (13), wenn

f. einer der Koëffizienten A oder B verschwindet, während $J \neq 0$ ist.

Die Gleichung stellt einen parabolischen Zylinder dar.

Der Kegel und der elliptische Zylinder sind Rotationsflächen, wenn zwei Koëffizienten einander gleich werden.

Nachdem Cauchy so alle Oberflächen zweiten Grades erhalten hat, gibt er eine Übersicht über die Anzahl der Mittelpunkte und Hauptebenen derselben [2]) und benutzt das Ergebnis bei der nun folgenden Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades, bei der er Bedingungen aufstellt, die zwischen den Konstanten der ursprünglichen Gleichung (1) bestehen, wenn diese die eine oder andere Oberfläche darstellt.

Die Gleichung (10) lautet in entwickelter Form:

$$14) \left\{ \begin{array}{l} s^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) s^2 + \\ (A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44}) s - A_{44} = 0 \end{array} \right.$$ [3]).

Die Wurzeln s dieser Gleichung stehen aber zu den entsprechenden Halbaxenquadraten in einer einfachen Beziehung. Wird nämlich eine Größe

$$k = \frac{a_{14} A_{14} + a_{24} A_{24} + a_{34} A_{34}}{A_{44}}$$ [4])

eingeführt, so daß

$$K - k = - \frac{A}{A_{44}}$$

---

[1]) Cauchy, pag. 89 unten.

[2]) ebenda, pag. 90.

[3]) ebenda, pag. 91, (51).

[4]) ebenda, pag. 91, (52) und (53).

ist, folgt aus der Gleichung (3), da $t = 0$ und $u = k$ ist,

$$15)\quad R = r^2 = -\frac{A}{A_{44} \cdot s}.\text{[1]}$$

Wird der sich aus (15) ergebende Wert

$$s = -\frac{A}{A_{44} R}$$

in die Gleichung (14) eingesetzt, wird die folgende erhalten:

$$16)\quad \begin{cases} R^3 + (A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44}) \dfrac{A}{A_{44}{}^2} \cdot R^2 + \\ (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \dfrac{A^2}{A_{44}{}^3} \cdot R + \dfrac{A^3}{A_{44}{}^4} = 0 \text{[2]}. \end{cases}$$

Je nachdem nun die Wurzeln der Gleichung (14) von 0 verschieden sind oder eine oder zwei derselben verschwinden, und je nachdem die Wurzeln der Gleichung (16) positiv oder negativ werden, was mit Hilfe der Descartes'schen Zeichenregel festgestellt wird, stellt Cauchy die folgende Klassifikation[3] auf:

I. $A \neq 0$, $A_{44} \neq 0$.

Die Wurzeln der Gleichung (14) sind von 0 verschieden, die Fläche hat einen Mittelpunkt und ist demnach ein Ellipsoid, ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid oder ein imaginäres Ellipsoid, je nachdem von den folgenden Produkten[4])

$$-\frac{A}{A_{44}}(a_{11} + a_{22} + a_{33})$$

$$-\frac{A}{A_{44}}(a_{11} + a_{22} + a_{33})(A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44})$$

$$-A(A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44})$$

---

[1]) Cauchy, pag. 92, (55).
[2]) ebenda, pag. 92, (56).
[3]) ebenda, pag. 92 ff.
[4]) ebenda, pag. 92, (57).

keines, eins, zwei oder drei negativ sind. Da aber die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung (16) gerade oder ungerade ist, je nachdem

$$A > 0 \text{ oder } A < 0$$ [1]

ist, läßt sich folgende übersichtlichere Teilung dieses ersten Hauptfalles geben:

a. $A < 0$

$$\alpha.\ A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} > 0$$ [2]

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, A_{44} > 0.$$

Die Fläche ist ein Ellipsoid.

β. sind die beiden unter (α) angegebenen Bedingungen nicht erfüllt, stellt die allgemeine Gleichung ein zweischaliges Hyperboloid dar.

b. $A > 0$

$$\alpha.\ A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} > 0$$ [2]

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, A_{44} > 0.$$

Die Fläche (1) ist ein imaginäres Ellipsoid.

β. sind nicht beide Bedingungen erfüllt, ist die durch die allgemeine Gleichung dargestellte Fläche ein einschaliges Hyperboloid.

Die zweite der Bedingungen (α) ersetzt Cauchy in der folgenden Betrachtung durch eine andere. Er leitet einige identische Relationen ab, die in der Schreibweise der Determinanten die folgenden sind:

$$17)\ \begin{cases} a_{11} A_{44} = A_{22,44} A_{33,44} - A_{23}{}^{2}{}_{,44} \\ a_{22} A_{44} = A_{33,44} A_{11,44} - A_{31}{}^{2}{}_{,44} \\ a_{33} A_{44} = A_{11,44} A_{22,44} - A_{12}{}^{2}{}_{,44}. \end{cases}$$ [3]

---

[1]) Cauchy, pag. 93, (58).
[2]) ebenda, pag. 94, (67).
[3]) ebenda, pag. 94, (68).

Sie sind Anwendungen des Determinantensatzes[1]: „Eine Subdeterminante h ten Grades der adjungierten Determinante einer Determinante n ten Grades hat zu der Adjunkte der entsprechenden Subdeterminante der letzteren das Verhältnis A^{h-1}" auf die Unterdeterminante A_{44} und für den Fall $h = 2$. Wegen der Relationen läßt sich nun die erwähnte Bedingung durch die folgende ersetzen:

$$18) \left\{ \begin{array}{l} A_{22,44} A_{33,44} + A_{33,44} A_{11,44} + A_{11,44} A_{22,44} > \\ A_{23}{}^2{}_{,44} + A_{31}{}^2{}_{,44} + A_{12}{}^2{}_{,44} \end{array} \right.$$ [2]).

Einfacher sind die Bedingungen, welche Cauchy an anderer Stelle bei der Betrachtung des Asymptotenkegels einer Oberfläche zweiten Grades für die obige $(a_{11} + a_{22} + {}_{33}) A_{44}$ erhält. Durch parallele Verschiebung des Koordinatensystems so, daß der Mittelpunkt der Fläche Anfangspunkt wird, geht die allgemeine Gleichung (1) über in:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{23} yz + 2 a_{31} zx + 2 a_{12} xy = - \frac{A}{A_{44}}.$$ [3])

Ist diese die Gleichung eines reellen oder imaginären Ellipsoids, sind die Schnittkurven der Koordinatenebenen reelle oder imaginäre Ellipsen. Für beide Fälle haben a_{11}, a_{22}, a_{33} dasselbe Vorzeichen, aber im ersteren Fall ist dies dem von $\frac{A}{A_{44}}$ entgegengesetzt, während es im letzteren Fall mit dem Vorzeichen von $\frac{A}{A_{44}}$ übereinstimmt. Da aber für das reelle Ellipsoid $A < 0$, für das imaginäre $A > 0$ ist, gelten für beide gemeinsam die Bedingungen:

$$a_{11} A_{44} > 0, \; a_{22} A_{44} > 0, \; a_{33} A_{44} > 0,$$

---

[1]) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, pag. 63, Satz 2.

[2]) Cauchy. Exercices de Mathématiques, pag. 94, (69).

[3]) ebenda, pag. 106, (109).

die in dieser Form nicht von Cauchy angegeben sind; er begnügt sich mit der vorhin erwähnten Angabe der Vorzeichen[1]).

Rotationsflächen entstehen, wenn zwei Wurzeln der Gleichung (14) einander gleich werden. Das tritt ein unter den Bedingungen:

$$19)\quad \frac{A_{23,44}}{a_{23}} = \frac{A_{31,44}}{a_{31}} = \frac{A_{12,44}}{a_{12}}\,^{2)}.$$

Das Ellipsoid wird eine Kugel, wenn die drei Wurzeln der Gleichung (14) gleich werden, d. h. wenn

$$20)\quad a_{11} = a_{22} = a_{33};\ a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0\,^{3)} \text{ ist.}$$

II. $A = 0,\ A_{44} \neq 0$[4]).

Es gibt nur einen Mittelpunkt, der auf der Fläche liegt.

$$\text{a. } A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} > 0\,^{5)}$$
$$(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, A_{44} > 0.$$

Die Gleichung (1) stellt einen Punkt dar.

b. sind nicht zugleich beide Bedingungen erfüllt, ist die Fläche ein Kegel.

III. $A_{44} = 0$[6]), $A \neq 0$,

$A_{23,44},\ A_{31,44},\ A_{12,44}$ nicht alle gleich 0,

eine Bedingung, die gleichwertig ist mit der folgenden

$A_{11,44},\ A_{22,44},\ A_{33,44}$ nicht alle 0[7]).

Die zweite Bedingung ist indirekt ausgesprochen. Cauchy fordert[8]), daß eine Hauptrichtung α, β, γ, die

---

[1]) Cauchy, pag. 106—107; vergl. hierzu discussion des lignes du second degré, pag. 79.

[2]) ebenda, pag. 95, (70).

[3]) ebenda, pag. 95, (71).

[4]) ebenda, pag. 95, (72).

[5]) ebenda, pag. 95 und 94, (67).

[6]) ebenda, pag. 95, (74).

[7]) ebenda, pag. 18, (90) und (91) resp. pag. 96, (75).

[8]) ebenda, pag. 96; vergl. pag. 14 und 15.

dem Werte $s = 0$ entspricht, der sich bei der Annahme $A_{44} = 0$ aus der Gleichung (14) ergibt, nicht der Gleichung

$$21)\quad a_{14}\cos\alpha + a_{24}\cos\beta + a_{34}\cos\gamma = 0$$ [1])

genüge. Da aber unter der Bedingung $A_{44} = 0$, wie aus den Gleichungen (5) und (6) folgt,

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x : y : z = A_{14} : A_{24} : A_{34}$$

ist, so ist die Bedingung (21) zu ersetzen durch

$$a_{14} A_{14} + a_{24} A_{24} + a_{34} A_{34} \neq 0$$

d. h. $A \neq 0$, da $A_{44} = 0$ ist.

Die durch die allgemeine Gleichung dargestellte Fläche ist ein Paraboloid. Die beiden von 0 verschiedenen Werte s ergeben sich aus der Gleichung

$$22)\quad s^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,s + A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} = 0$$ [2]),

aus der mit Hilfe der Descartes'schen Zeichenregel zu schließen ist, daß das Paraboloid hyperbolisch ist, wenn

$$a.\quad A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} < 0$$ [3]),

dagegen elliptisch, wenn

$$b.\quad A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} > 0$$ [3]) ist.

Ein Rotationsparaboloid entsteht, wenn die beiden Wurzeln der Gleichung (22) gleich sind.

IV. $A_{44} = 0$, $A = 0$.

Die zweite Bedingung ergibt sich aus den Worten [4]), daß die Werte $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, die der Wurzel $s = 0$

---

[1]) Cauchy, pag. 83, (13).
[2]) ebenda, pag. 102, (97).
[3]) ebenda, pag. 103, (101).
[4]) ebenda, pag. 96.

entsprechen, der Gleichung (21) genügen sollen. Sie sind zu berechnen aus den Gleichungen

$$23)\quad \begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma = 0 \text{ [1]} \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma = 0 \\ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Eine Gerade, welche dieser Richtung parallel ist, liegt entweder ganz auf der Oberfläche oder schneidet sie nicht; die Fläche ist ein Zylinder[2]). Da für diesen die Richtung α, β, γ eine ganz bestimmte ist, müssen zwei der Gleichungen (23) von einander verschieden sein, z. B. die beiden ersten; aus dieser Erwägung folgt als notwendige Bedingung:

$$A_{33,44} \neq 0 \text{ [3]}.$$

Die Auflösung der beiden ersten Gleichungen (23) ergibt:

$$24)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{A_{13,44}} = \dfrac{\cos\beta}{A_{23,44}} = \dfrac{\cos\gamma}{A_{33,44}} = \text{ [4]} \\ \pm \dfrac{1}{\sqrt{A_{13}^{2}{}_{,44} + A_{23}^{2}{}_{,44} + A_{33}^{2}{}_{,44}}}; \end{cases}$$

da das Ergebnis ein ganz bestimmtes ist, dürfen nicht zugleich $A_{13,44}$, $A_{23,44}$, $A_{33,44}$ verschwinden. Der Ort für die Mittelpunkte des Zylinders ist die Axe

$$25)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{A_{13,44}}{A_{33,44}}\zeta + \dfrac{A_{33,14}}{A_{33,44}} \text{ [5]} \\ \eta = \dfrac{A_{23,44}}{A_{33,44}}\zeta + \dfrac{A_{33,24}}{A_{33,44}}. \end{cases}$$

---

[1]) Cauchy, pag. 97, (76).

[2]) ebenda, pag. 15.

[3]) ebenda, pag. 97, (77).

[4]) ebenda, pag. 98, (82).

[5]) ebenda, pag. 98, (85).

Notwendig ist ferner die Bedingung

$$26)\quad A_{34} = 0 \text{ [1]}.$$

Die beiden Wurzeln s, die von 0 verschieden sind, sind aus der Gleichung (22) zu berechnen, die direkten Werte für die Quadrate der Halbaxen ergeben sich aus der Gleichung

$$27)\quad \begin{cases} (A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44}) R^2 + \\ (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \dfrac{A}{A_{44}} R + \dfrac{A^2}{A_{44}{}^2} = 0 \text{ [2]}. \end{cases}$$

In dieser ist die Größe $\frac{A}{A_{44}} = \frac{0}{0}$ und demnach näher zu bestimmen. Cauchy definiert

$$k = a_{14}\xi + a_{24}\eta + a_{34}\zeta \text{ [3]},$$

wo für ξ, η, ζ die Koordinaten des Mittelpunktes, für den vorliegenden Fall also die Werte (25) für ξ und η einzusetzen sind. Es folgt dann:

$$k = \frac{a_{14} A_{33,14} + a_{24} A_{33,24} \text{ [4]}}{A_{33,44}},$$

da $A_{34} = 0$ ist, und folglich:

$$28)\quad \frac{A}{A_{44}} = \frac{A_{33} \text{ [4]}}{A_{33,44}}.$$

Auf dieselbe Weise würde sich ergeben, wenn je zwei andere der Gleichungen (23) als verschieden angesehen werden,

$$28')\quad \frac{A}{A_{44}} = \frac{A_{22}}{A_{22,44}},\quad \frac{A}{A_{44}} = \frac{A_{11} \text{ [4]}}{A_{11,44}}.$$

---

[1] Cauchy, pag. 98, (84).
[2] ebenda, pag. 102, (99).
[3] ebenda, pag. 91, (52).
[4] ebenda, pag. 99.

Dann ist außer den obigen Bedingungen vorauszusetzen, daß auch A_{24} und A_{14} verschwinden, was Cauchy nicht besonders hervorhebt. Er stellt als besondere Bedingung auf:

$$\frac{A_{11}}{A_{11,44}} = \frac{A_{22}}{A_{22,44}} = \frac{A_{33}}{A_{33,44}}.$$ [1]

Die Gleichung (27) geht jetzt über in die folgende:

$$27')\quad \begin{cases} (A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44}) R^2 + \\ (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \dfrac{A_{33}}{A_{33,44}} R + \dfrac{A_{33}^{\ 2}}{A_{33\ ,44}^{\ 2}} = 0. \end{cases}$$

Statt der Größe $\frac{A_{33}}{A_{33,44}}$ kann $\frac{A_{22}}{A_{22,44}}$ oder $\frac{A_{11}}{A_{11,44}}$ eingeführt werden. Mit Hilfe der Gleichung (27') ergibt sich die folgende Teilung des vorliegenden Hauptfalles [2]:

$$\text{a. } (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \frac{A_{33}}{A_{33,44}} < 0$$

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33}) (A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44}) \frac{A_{33}}{A_{33,44}} < 0.$$

Der Zylinder ist ein elliptischer, insbesondere ein Rotationszylinder, wenn beide Wurzeln der Gleichung (27') einander gleich sind;

b. ist eins der obigen Produkte positiv, das andere negativ, ist der Zylinder hyperbolisch;

c. sind beide Produkte positiv, ist der Zylinder imaginär.

$$\text{V. } A = 0, A_{44} = 0;$$

$$A_{23,44} = 0,\ A_{31,44} = 0,\ A_{12,44} = 0$$ [3].

---

[1] Cauchy, pag. 100, (89).

[2] ebenda, pag. 103.

[3] ebenda, pag. 96, (75).

Die letzten Bedingungen sind gleichbedeutend mit den folgenden:

$$A_{11,44} = 0,\ A_{22,44} = 0,\ A_{33,44} = 0$$ [1]),

d. h.: es verschwinden alle Unterdeterminanten zweiten Grades von A_{44} [2]). Zwei Wurzeln der Gleichung (14) verschwinden. Um aber diesen Fall von dem nächsten zu trennen, stellt Cauchy als fernere Bedingung auf, daß nicht die beiden Ebenen

$$29)\ \begin{cases} \frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{31}} + \frac{z}{a_{12}} = 0 \\ a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0, \end{cases}$$ [3])

die sich in einer den Erzeugenden des im vorliegenden Fall von der Gleichung (1) dargestellten parabolischen Zylinders parallelen Geraden schneiden, zusammenfallen [4]). Damit spricht er indirekt die Bedingung aus, daß

$$A_{23,14},\quad A_{31,24},\quad A_{12,34}$$

nicht zugleich verschwinden; denn wenn diese gleich 0 wären, wären die Koëffizienten der ersten Gleichung (29) den entsprechenden der zweiten proportional, eine Eigenschaft der Koëffizienten zweier zusammenfallenden Ebenen, die Cauchy auch an anderer Stelle benutzt [5]).

$$\text{VI.}\quad A = 0,\ A_{44} = 0,\ A_{33} = 0,\ A_{22} = 0,\ A_{11} = 0.$$

Die drei letzten Bedingungen ergeben sich aus der Annahme, daß die Werte (28) und (28′) verschwinden [6]).

---

[1]) Cauchy, pag. 18, (90).

[2]) vergl. Clebsch. Vorles. über Geometrie, pag. 162, (11).

[3]) Cauchy. Exercices de Mathématiques, pag. 84, (16) und (17).

[4]) ebenda, pag. 96.

[5]) ebenda, pag. 18, (89).

[6]) ebenda, pag. 103.

Der Zylinder zerfällt in ein sich schneidendes Ebenenpaar oder eine Gerade, je nachdem

a. $A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} < 0$[1]) oder

b. $A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} > 0$ ist.

VII. $A = 0,\ A_{44} = 0,\ A_{33} = 0,\ A_{22} = 0,\ A_{11} = 0.$

$$\left.\begin{array}{lll} A_{11,44} = 0, & A_{22,44} = 0, & A_{33,44} = 0 \\ A_{23,44} = 0, & A_{31,44} = 0, & A_{12,44} = 0 \\ A_{14,33} = 0, & A_{24,33} = 0, & A_{14,22} = 0 \\ A_{34,22} = 0, & A_{24,11} = 0, & A_{34,11} = 0 \end{array}\right\}\ ^{2)}$$

$$A_{23,14} = 0,\ A_{31,24} = 0,\ A_{12,34} = 0\ ^{3)}.$$

Von den drei Wurzeln der Gleichung (14) verschwinden zwei, während die dritte sich ergibt aus der Gleichung:

$$30)\quad s - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 0\ ^{4)}.$$

Die entsprechende Gleichung in R ist:

$$31)\quad (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,R + \frac{A_{33}}{A_{33,44}} = 0\ ^{5)},$$

die dadurch unbrauchbar wird, daß das absolute Glied unbestimmt ist. Der bestimmte Wert läßt sich auf ähnlichem Wege ermitteln wie der Wert $\frac{A}{A_{44}}$ der Gleichung (27); es folgt:

$$32)\quad \frac{A_{33}}{A_{33,44}} = \frac{A_{22,33}}{a_{11}} = \frac{A_{33,11}}{a_{22}} = \frac{A_{11,22}}{a_{33}}\ ^{6)}.$$

---

[1]) Cauchy, pag. 103, (101).
[2]) ebenda, pag. 98, (86).
[3]) ebenda, pag. 19, (92).
[4]) ebenda, pag. 102, (98).
[5]) ebenda, pag. 102, (100).
[6]) ebenda, pag. 100, (91).

Die Gleichung (31) geht dann über in:

$$31') \quad (a_{11} + a_{22} + a_{33}) R + \frac{A_{22,33}}{a_{11}} = 0.$$

Da die beiden Ebenen (29) in eine zusammenfallen, hat die Fläche eine Mittelpunktsebene; die Gleichung (1) stellt ein paralleles Ebenenpaar dar, das reell ist, wenn

$$a. \quad \frac{A_{22,33}}{a_{11}} (a_{11} + a_{22} + a_{33}) < 0$$ [1],

dagegen imaginär, wenn

$$b. \quad \frac{A_{22,33}}{a_{11}} (a_{11} + a_{22} + a_{33}) > 0$$

ist. Statt der Größe $\frac{A_{22,33}}{a_{11}}$ können auch die gleichwertigen Größen (32) eingesetzt werden.

Es kommen schließlich zu den im Anfang dieser Nummer aufgezählten Bedingungen hinzu:

$$c. \quad A_{22,33} = 0, \quad A_{33,11} = 0, \quad A_{11,22} = 0,$$

da die Bedingung lautet, daß die Werte (32) verschwinden [2], und

$$A_{23,11} = 0, \quad A_{31,22} = 0, \quad A_{12,33} = 0.$$

Es verschwinden demnach alle Unterdeterminanten zweiten Grades von A. Die letzten drei Bedingungen sind nicht direkt bei Cauchy ausgesprochen, ergeben sich aber sofort aus der Bedingung

$$33) \quad L^2 - a_{23} a_{31} a_{12} a_{44} = 0$$ [3], wo

$$33') \quad L = a_{23} a_{14} = a_{31} a_{24} = a_{12} a_{34}$$ [4]

---

[1] Cauchy, pag. 103.
[2] ebenda, pag. 103.
[3] ebenda, pag. 19, (96).
[4] ebenda, pag. 19, (93).

ist. Wird nämlich die Gleichung (33) der Reihe nach durch $a_{23}\,a_{31}$, $a_{31}\,a_{12}$, $a_{12}\,a_{23}$ dividiert, ergeben sich die folgenden:

$$\frac{L}{a_{23}} \cdot \frac{L}{a_{31}} - a_{12}\,a_{44} = 0$$
$$\frac{L}{a_{31}} \cdot \frac{L}{a_{12}} - a_{23}\,a_{44} = 0$$
$$\frac{L}{a_{12}} \cdot \frac{L}{a_{23}} - a_{31}\,a_{44} = 0$$

und wegen der Werte (33'):

$$a_{14}\,a_{24} - a_{12}\,a_{44} = 0$$
$$a_{24}\,a_{34} - a_{23}\,a_{44} = 0$$
$$a_{34}\,a_{14} - a_{31}\,a_{44} = 0$$

d. h. $A_{23;11} = 0$, $A_{31,22} = 0$, $A_{12,33} = 0$.

Die beiden parallelen Ebenen fallen in eine zusammen.

II. Die Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades bei Plücker.

Während Cauchy zu seiner Klassifikation die kubische Gleichung zugrunde legte, von der die Halbaxen der Fläche abhängen, findet Plücker seine Resultate zunächst unabhängig von dieser, da er zuerst die „collineare" Einteilung voranstellt. Er beschäftigt sich im ersten Paragraphen seiner Untersuchungen[1]) mit der linken Seite der allgemeinen Gleichung für die Oberflächen zweiten Grades, die er in der symmetrischen Form schreibt:

$$1)\quad \Omega = Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + A'''s^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cps + 2C'qs + 2C''rs.$$

Eine Reihe von geeigneten Substitutionen

$$2)\quad \begin{cases} p = P + \alpha''Q + \alpha'R + \alpha S \\ q = Q + \beta' R + \beta S \\ r = R + \gamma S \\ s = S \end{cases}$$

führt sie über in

$$3)\quad \Omega = \pi P^2 + \varkappa Q^2 + \varrho R^2 + \sigma S^2.$$

Bei der jetzt üblichen Schreibweise der Funktion (1)

$$1')\quad f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4$$

---

[1]) Plücker. System d. Geom. d. Raumes.

sind die Koëffizienten der Substitution (2) aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$2') \begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma + a_{14} = 0 \text{ [1]}, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma + a_{24} = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma + a_{34} = 0, \\ a_{11}\alpha' + a_{12}\beta' + a_{13} = 0 \text{ [2]}, \\ a_{21}\alpha' + a_{22}\beta' + a_{23} = 0, \\ a_{11}\alpha'' + a_{12} = 0 \text{ [3]}. \end{cases}$$

Aus diesen ergeben sich die Werte:

$$2'') \begin{cases} \alpha = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad \beta = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad \gamma = \frac{A_{34}}{A_{44}} \text{ [4]}, \\ \alpha' = \frac{A_{13,44}}{A_{33,44}}, \quad \beta' = \frac{A_{23,44}}{A_{33,44}} \text{ [2]}, \\ \alpha'' = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \text{ [3]}; \end{cases}$$

die Konstanten sind ebenso wie im vorigen Abschnitt Unterdeterminanten der Hauptdeterminante A. Die Koëffizienten der Funktion (3) erhalten die Werte:

$$3') \begin{cases} \pi = a_{11} \text{ [5]}, \\ \varkappa = \frac{A_{33,44}}{a_{11}}, \\ \varrho = \frac{A_{44}}{A_{33,44}}, \\ \sigma = \frac{A}{A_{44}}. \end{cases}$$

---

[1]) Plücker, pag. 51, (8).

[2]) ebenda, pag. 53.

[3]) ebenda, pag. 54.

[4]) ebenda, pag. 51; doch sind die Vorzeichen bei Plücker unrichtig.

[5]) ebenda, pag. 54.

Je nachdem nun die Vorzeichen der Koëffizienten (3′) gleich oder verschieden sind und eine oder mehrere der Konstanten verschwinden, nimmt die Funktion (3) Formen an, für die Plücker die ohne weitere Rechnung aus derselben sich ergebenden, notwendigen Bedingungen ableitet, um indessen sofort zu betonen, daß dieselben nicht in allen Fällen ausreichen, um die betreffende Form vollständig zu charakterisieren. Um die hinreichenden Bedingungen abzuleiten, führt er eine Reihe identischer Relationen [1]) zwischen den Konstanten der Funktion (1) auf und, um diese übersichtlicher zu gestalten, zunächst folgende Symbole [1]):

$$\text{I.}\quad \Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A$$

$$\text{II.}\quad \Theta = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{11}$$

$$\Theta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{22}$$

$$\Theta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{33}$$

$$\Theta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{44}$$

---

[1]) Plücker, pag. 57—58.

III. $$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = - A_{23}$$

$$\Delta_{02} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = - A_{13}$$

$$\Delta_{01} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - A_{12}$$

$$\Delta_{03} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = - A_{14}$$

$$\Delta_{13} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = - A_{24}$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = - A_{34}.$$

IV. $$\Upsilon = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{22,33} = - A_{23,23}$$

$$\Upsilon_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{33,11} = - A_{31,31}$$

$$\Upsilon_2 = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{11,22} = - A_{12,12}$$

$$\Xi = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11,44} = - A_{14,14}$$

$$\Xi_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22,44} = - A_{24,24}$$

$$\Xi_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33,44} = - A_{34,34}.$$

V. $$\Psi_{03} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - A_{23,44} = A_{24,34}$$

$$\Psi_{13} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - A_{31,44} = A_{34,14}$$

$$\Psi_{23} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - A_{12,44} = A_{14,24}$$

$$\Psi_{02} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} = - A_{24,33} = A_{23,43}$$

$$\Psi_{12} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} = - A_{41,33} = A_{43,13}$$

$$\Psi_{32} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = - A_{12,33} = A_{13,23}$$

$$\Psi_{01} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} = - A_{34,22} = A_{32,42}$$

$$\Psi_{21} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = - A_{41,22} = A_{42,12}$$

$$\Psi_{31} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - A_{13,22} = A_{12,32}$$

$$\Psi_{10} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = - A_{34,11} = A_{31,41}$$

$$\Psi_{20} = - \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = - A_{42,11} = A_{41,21}$$

$$\Psi_{30} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - A_{23,11} = A_{21,31}.$$

Die Plücker'schen Symbole sind demnach mit der Hauptdeterminante der Funktion (1') und deren Unterdeterminanten dritten und zweiten Grades identisch, wenn von den Vorzeichen abgesehen wird. Doch werden die letzteren nicht alle mit besonderen Bezeichnungen versehen; es fehlen die folgenden:

$$A_{23,14},\quad A_{31,24},\quad A_{12,34}.$$

Die identischen Relationen, die Plücker angibt, stellen sich nun demgemäß folgendermaßen dar:

VI. $A_{22,44}\, A_{33,44} - A_{23}{}^{2}{}_{,44} = a_{11}\, A_{44}$ [1])
$A_{33,44}\, A_{11,44} - A_{31}{}^{2}{}_{,44} = a_{22}\, A_{44}$
$A_{11,44}\, A_{22,44} - A_{12}{}^{2}{}_{,44} = a_{33}\, A_{44}$
$A_{22,33}\, A_{44,33} - A_{24}{}^{2}{}_{,33} = a_{11}\, A_{33}$
$A_{44,33}\, A_{11,33} - A_{41}{}^{2}{}_{,33} = a_{22}\, A_{33}$
$A_{11,33}\, A_{22,33} - A_{12}{}^{2}{}_{,33} = a_{44}\, A_{33}$
$A_{33,22}\, A_{44,22} - A_{34}{}^{2}{}_{,22} = a_{11}\, A_{22}$
$A_{44,22}\, A_{11,22} - A_{41}{}^{2}{}_{,22} = a_{33}\, A_{22}$
$A_{11,22}\, A_{33,22} - A_{13}{}^{2}{}_{,22} = a_{44}\, A_{22}$
$A_{33,11}\, A_{44,11} - A_{34}{}^{2}{}_{,11} = a_{22}\, A_{11}$
$A_{44,11}\, A_{22,11} - A_{42}{}^{2}{}_{,11} = a_{33}\, A_{11}$
$A_{22,11}\, A_{33,11} - A_{23}{}^{2}{}_{,11} = a_{44}\, A_{11}.$

VII. $A_{12,44}\, A_{13,44} - A_{11,44}\, A_{23,44} = a_{23}\, A_{44}$ [2])
$A_{23,44}\, A_{21,44} - A_{22,44}\, A_{31,44} = a_{31}\, A_{44}$
$A_{31,44}\, A_{32,44} - A_{33,44}\, A_{12,44} = a_{12}\, A_{44}$
$A_{12,33}\, A_{14,33} - A_{11,33}\, A_{24,33} = a_{24}\, A_{33}$
$A_{24,33}\, A_{21,33} - A_{22,33}\, A_{41,33} = a_{41}\, A_{33}$
$A_{41,33}\, A_{42,33} - A_{44,33}\, A_{12,33} = a_{12}\, A_{33}$

---

[1]) Plücker, pag. 57, IV.
[2]) ebenda, pag. 57, IVa.

$$A_{13,22}\,A_{14,22} - A_{11,22}\,A_{34,22} = a_{34}\,A_{22}$$
$$A_{34,22}\,A_{31,22} - A_{33,22}\,A_{41,22} = a_{41}\,A_{22}$$
$$A_{41,22}\,A_{43,22} - A_{44,22}\,A_{13,22} = a_{13}\,A_{22}$$
$$A_{23,11}\,A_{24,11} - A_{22,11}\,A_{34,11} = a_{34}\,A_{11}$$
$$A_{34,11}\,A_{32,11} - A_{33,11}\,A_{42,11} = a_{42}\,A_{11}$$
$$A_{42,11}\,A_{43,11} - A_{44,11}\,A_{23,11} = a_{23}\,A_{11}.$$

Wie sofort ersichtlich ist, sind die Relationen Anwendungen des Determinantensatzes[1]: „Eine Unterdeterminante hten Grades der adjungierten Determinante einer Determinante nten Grades hat zu der Adjunkte der entsprechenden Subdeterminante der letzteren das Verhältnis A^{h-1}“ auf die Unterdeterminanten A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44} und für $h = 2$. Eine Anwendung dieses Satzes auch auf die übrigen Unterdeterminanten dritten Grades führt zu den Relationen[2]:

$$\text{VIII.}\quad A_{23,23}\,A_{44,23} - A_{24,23}\,A_{34,23} = -a_{11}\,A_{23}$$
$$A_{34,34}\,A_{22,34} - A_{32,34}\,A_{42,34} = -a_{11}\,A_{34}$$
$$A_{42,42}\,A_{33,42} - A_{43,42}\,A_{23,42} = -a_{11}\,A_{42}$$
$$A_{34,34}\,A_{11,34} - A_{31,34}\,A_{41,34} = -a_{22}\,A_{34}$$
$$A_{41,41}\,A_{33,41} - A_{43,41}\,A_{13,41} = -a_{22}\,A_{41}$$
$$A_{13,13}\,A_{44,13} - A_{14,13}\,A_{34,13} = -a_{22}\,A_{13}$$
$$A_{41,41}\,A_{22,41} - A_{42,41}\,A_{12,41} = -a_{33}\,A_{41}$$
$$A_{12,12}\,A_{44,12} - A_{14,12}\,A_{24,12} = -a_{33}\,A_{12}$$
$$A_{24,24}\,A_{11,24} - A_{21,24}\,A_{41,24} = -a_{33}\,A_{24}$$
$$A_{12,12}\,A_{33,12} - A_{13,12}\,A_{23,12} = -a_{44}\,A_{12}$$
$$A_{23,23}\,A_{11,23} - A_{21,23}\,A_{31,23} = -a_{44}\,A_{23}$$
$$A_{31,31}\,A_{22,31} - A_{32,31}\,A_{12,31} = -a_{44}\,A_{31}.$$

---

[1] Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten, pag. 63, Satz 2.

[2] Plücker. System d. Geom. d. Raumes, pag. 58, VII.

Wird der obige Satz auf die Determinante A für h = 2 angewandt, ergeben sich die Relationen[1]):

IX.
$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} \\ A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{14} \\ A_{41} & A_{44} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{31} \\ A_{13} & A_{11} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Die Relationen[2]):

X.
$$\Delta_{13} = a_{23} A_{23,24} + a_{21} A_{21,24} = a_{34} A_{34,24} + a_{14} A_{14,24}$$
$$\Delta_{23} = a_{31} A_{31,34} + a_{32} A_{32,34} = a_{14} A_{14,34} + a_{24} A_{24,34}$$
$$\Delta_{03} = a_{12} A_{12,14} + a_{13} A_{13,14} = a_{24} A_{24,14} + a_{34} A_{34,14}$$
$$\Delta_{02} = a_{23} A_{23,31} + a_{43} A_{43,31} = a_{12} A_{12,31} + a_{14} A_{14,31}$$
$$\Delta_{01} = a_{31} A_{31,12} + a_{41} A_{14,12} = a_{23} A_{23,12} + a_{24} A_{24,12}$$
$$\Delta_{12} = a_{12} A_{12,23} + a_{42} A_{42,23} = a_{31} A_{31,23} + a_{34} A_{34,23}$$

---

1) Plücker, pag. 58, IX.
2) ebenda, pag. 57, V.

ergeben sich aus den Determinanten $A_{24}, A_{34}, A_{14}, A_{31}, A_{12}, A_{23}$ dadurch, daß diese nach einer Zeile und einer Kolonne aufgelöst werden. Beide Werte sind jedesmal gleichgesetzt worden, und ein beiden Seiten gemeinsames Glied ist fortgefallen.

Zwischen der Hauptdeterminante und den Unterdeterminanten zweiten Grades bestehen schließlich die Identitäten: [1])

$$\text{XI.}\quad \begin{vmatrix} A_{33,44} & -A_{32,44} & -A_{42,33} \\ -A_{23,44} & A_{22,44} & -A_{43,22} \\ -A_{24,33} & -A_{34,22} & A_{33,22} \end{vmatrix} = a_{11}^2 A$$

$$\begin{vmatrix} A_{11,44} & -A_{13,44} & -A_{43,11} \\ -A_{31,44} & A_{33,44} & -A_{41,33} \\ -A_{34,11} & -A_{14,33} & A_{33,11} \end{vmatrix} = a_{22}^2 A$$

$$\begin{vmatrix} A_{22,44} & -A_{21,44} & -A_{41,22} \\ -A_{12,44} & A_{11,44} & -A_{42,11} \\ -A_{14,22} & -A_{24,11} & A_{11,22} \end{vmatrix} = a_{33}^2 A$$

$$\begin{vmatrix} A_{22,33} & -A_{21,33} & -A_{31,22} \\ -A_{12,33} & A_{11,33} & -A_{32,11} \\ -A_{13,22} & -A_{23,11} & A_{22,11} \end{vmatrix} = a_{44}^2 A.$$

Da diese Beziehungen nicht die unmittelbaren Anwendungen eines bei Baltzer erwähnten Determinantensatzes sind, so mögen sie hier eingehender betrachtet werden. Wird die Determinante etwa der ersten Identität nach der letzten Kolonne aufgelöst, so lautet sie:

$$\begin{aligned} &A_{22,33}(A_{22,44}A_{33,44} - A_{23}^2{}_{,44}) - \\ &A_{22,34}(A_{33,44}A_{22,34} + A_{23,44}A_{24,33}) - \\ &A_{42,33}(A_{23,44}A_{22,34} + A_{22,44}A_{24,33}) = a_{11}^2 A \end{aligned}$$

[1]) Plücker, pag. 58, VIIIa; doch müssen in jeder der drei ersten Relationen die Größen Ξ_1 und Ξ_2, Ξ und Ξ_2, Ξ und Ξ_1 ihre Stelle wechseln.

oder wegen der ersten der Relationen (VI) und der zweiten und dritten der Identitäten (VIII):

$$a_{11} A_{22,33} A_{44} - a_{11} A_{22,34} A_{34} - a_{11} A_{42,33} A_{24} = a_{11}^2 A \text{ oder}$$

$$a_{11} [a_{11} a_{44} A_{44} + a_{11} a_{34} A_{34} + a_{11} a_{24} A_{24} - a_{14}^2 A_{44} - a_{14} a_{31} A_{34} - a_{14} a_{12} A_{24}] = a_{11}^2 A.$$

Da aber

$$a_{14} A_{44} + a_{13} A_{43} + a_{12} A_{42} + a_{11} A_{41} = 0$$

ist nach dem Satze[1]: „Multipliziert man die Elemente einer Reihe einer Determinante mit den Unterdeterminanten einer andern, so ergibt die Summe identisch den Wert 0", so folgt weiter:

$$a_{11} \left[a_{11} (a_{44} A_{44} + a_{34} A_{34} + a_{24} A_{24} + a_{14} A_{14})\right] = a_{11}^2 A,$$

folglich ist die ursprüngliche Relation eine identische. Auf dieselbe Weise läßt sich das auch für die anderen Relationen nachweisen.

Es möge nun die Determinante $n$ten Grades

$$A^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1h} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2h} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3h} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \dots & a_{hh} & \dots & a_{hi} & \dots & a_{hn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ih} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[1]) Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten, pag. 13, § 3, 2.

zu Grunde liegen und allgemein bezeichnet werden:

$$p_{hi} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1h} \\ a_{i1} & a_{ih} \end{vmatrix}.$$

Aus diesen Größen p_{hi} werde ferner die Determinante gebildet:

$$P^{(n)} = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix},$$

und es werde angenommen, daß die im Vorhergehenden für eine Determinante vierten Grades nachgewiesene Identität allgemein gültig sei, d. h. daß

$$P^{(n)} = a_{11}^{\;n-2} A^{(n)}$$

sei. Es werde ferner eine Determinante $(n+1)$ten Grades betrachtet und von dieser die Determinante

$$P^{(n+1)} = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & p_{2,n+1} \\ p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & p_{3,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & p_{n,n+1} \\ p_{n+1,2} & p_{n+1,3} & \cdots & p_{n+1,n} & p_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

gebildet. Wird diese nach der letzten Reihe entwickelt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} P^{(n+1)} &= p_{2,n+1} P_{2,n+1} + p_{3,n+1} P_{3,n+1} + \cdots \\ &\quad + p_{n,n+1} P_{n,n+1} + p_{n+1,n+1} P_{n+1,n+1} \\ &= a_{11} \, (a_{2,n+1} P_{2,n+1} + a_{3,n+1} P_{3,n+1} + \cdots \\ &\quad + a_{n,n+1} P_{n,n+1} + a_{n+1,n+1} P_{n+1,n+1}) \end{aligned}$$

$$- a_{1,n+1} (a_{12} P_{2,n+1} + a_{13} P_{3,n+1} + \dots + a_{1n} P_{n,n+1} + a_{1,n+1} P_{n+1,n+1}).$$

Nun sind aber die Größen $P_{l,n+1}$, wo $l = 2, 3, \dots, n+1$ ist, Determinanten, die gebildet sind aus den Elementen von Determinanten $A_{l,n+1}$, die vom $n$ten Grade sind. Von diesen ist aber oben vorausgesetzt worden, daß allgemein die Beziehung besteht:

$$P^{(n)} = a_{11}^{\ n-2} A^{(n)};$$

daher ist auch:

$$P_{l,n+1} = a_{11}^{\ n-2} A_{l,n+1},$$

und folglich ist:

$$P^{(n+1)} = a_{11}^{\ n-1} [a_{2,n+1} A_{2,n+1} + a_{3,n+1} A_{3,n+1} + \dots + a_{n,n+1} A_{n,n+1} + a_{n+1,n+1} A_{n+1,n+1}] - a_{11}^{\ n-2} a_{1,n+1} [a_{21} A_{2,n+1} + a_{31} A_{3,n+1} + \dots + a_{n1} A_{n,n+1} + a_{n+1,1} A_{n+1,n+1}].$$

Da aber nach dem pag. 39 erwähnten Satz

$$a_{11} A_{1,n+1} + a_{21} A_{2,n+1} + \dots + a_{n1} A_{n,n+1} + a_{n+1,1} A_{n+1,n+1} = 0$$

ist, so folgt weiter:

$$P^{(n+1)} = a_{11}^{\ n-1} [a_{1,n+1} A_{1,n+1} + a_{2,n+1} A_{2,n+1} + a_{3,n+1} A_{3,n+1} + \dots + a_{n,n+1} A_{n,n+1} + a_{n+1,n+1} A_{n+1,n+1}] = a_{11}^{\ n-1} A^{(n+1)}.$$

Damit ist nachgewiesen, daß die Beziehung zwischen der Determinante P und A

$$P^{(n)} = a_{11}^{\ n-2} A^{(n)}$$

für eine Determinante $(n+1)$ten Grades richtig ist, wenn sie für eine Determinante $n$ten Grades richtig ist. Nun gilt aber die Identität für eine Determinante zweiten Grades, denn hier ist

$$P^{(2)} = A^{(2)} \text{ oder}$$
$$P^{(2)} = a_{11}{}^{0} A^{(2)}.$$

Für eine Determinante dritten Grades ist:

$$P^{(3)} = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{33} & A_{23} \\ A_{32} & A_{22} \end{vmatrix},$$

folglich wegen der ersten der identischen Relationen (VI):

$$P^{(3)} = a_{11}{}^{1} A^{(3)}.$$

Es ist pag. 38 und 39 direkt gezeigt worden, daß

$$P^{(4)} = a_{11}{}^{2} A^{(4)}$$

ist. Die Beziehung gilt demnach allgemein. Nun kann aber durch Vertauschen der Reihen einer Determinante mit einander jedes Diagonalglied a_{hh} derselben an die Spitze der Determinante gebracht werden, ohne daß diese ihren Wert ändert. Wird die Determinante, die nach demselben Gesetz wie P aus den Unterdeterminanten zweiten Grades von A zu bilden ist, mit P_h bezeichnet, ergibt sich die allgemeinere Beziehung:

$$P_h^{(n)} = a_{hh}{}^{n-2} A^{(n)},$$

von der die Identitäten (XI) Anwendungen sind für $n = 4$ und $h = 1, 2, 3, 4$.

Mit Hilfe der im Vorstehenden wiedergegebenen identischen Relationen bestimmt Plücker nun die vollständigen Bedingungen zwischen den Konstanten der Funktion (1), unter denen diese die verschiedenen, möglichen Formen annimmt, und wählt in jedem Fall die

Bedingungen aus, die hinreichen, um den betreffenden Fall zu charakterisieren. Ebenso behandelt er dann die allgemeine, nichthomogene Funktion zweiten Grades von drei Veränderlichen, soweit sich neue Unterscheidungen ergeben.

Im zweiten Paragraphen seiner Entwickelungen betrachtet er die allgemeine Gleichung der Oberflächen zweiten Grades

$$\Omega = 0$$

und erhält unter den im ersten Paragraphen aufgestellten Bedingungen die einzelnen Oberflächen. Um eine Wiederholung der Bedingungen zu vermeiden, sollen beide Paragraphen nebeneinander betrachtet werden.

Die allgemeine Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung lautet in nichthomogener Schreibweise:

$$4)\quad \begin{cases} \Omega = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz \\ \qquad + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 \end{cases}$$ [1].

Durch lineare Substitutionen, die Plücker später[1] als Koordinatentransformation nach dem Mittelpunkt der Oberfläche

$$5)\quad x = \frac{A_{14}}{A_{44}},\quad y = \frac{A_{24}}{A_{44}},\quad z = \frac{A_{34}}{A_{44}}$$ [2]

deutet, führt er die Gleichung (4) über in die folgende[3]:

$$4')\quad \begin{cases} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz \\ \qquad + 2Byz = M, \text{ wo} \end{cases}$$

$$4'')\quad M = -\frac{A}{A_{44}}$$ [3] ist.

Eine entsprechende geometrische Deutung fehlt der zweiten Reihe von Substitutionen, durch die er die linke

---

[1]) Plücker. System d. Geom. d. Raumes, pag. 136.

[2]) ebenda, pag. 136, (2); die Vorzeichen bei Plücker sind unrichtig.

[3]) ebenda, pag. 136, (3).

Seite der Gleichung (4') in die Summe von Quadraten überführt. Die Gleichung (4') wird dann die folgende:

$$6)\quad a_{11}x^2 + \frac{A_{33,44}}{a_{11}} y^2 + \frac{A_{44}}{A_{33,44}} z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0 \quad ^{1)},$$

die Plücker zu der folgenden Klassifikation [2]) der Oberflächen zweiter Ordnung führt:

I. $A \neq 0,\ A_{44} \neq 0.$

a. $A > 0$ [3]).

α. $A_{33,44} > 0,\ a_{11} A_{44} > 0.$

Die Gleichung (4) stellt ein imaginäres Ellipsoid dar.

Notwendige Bedingungen, die mit Hilfe der identischen Relationen abgeleitet werden, sind außerdem die folgenden [4]):

$$A_{11,44} > 0,\ A_{22,44} > 0,$$
$$A_{22,33} > 0,\ A_{33,11} > 0,\ A_{11,22} > 0,$$
$$A_{11},\ A_{22},\ A_{33},\ A_{44},\ a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{44}$$

stimmen im Vorzeichen überein.

β. nicht zugleich $A_{33,44} > 0,\ a_{11} A_{44} > 0$ [3]).

Die durch die obige Gleichung dargestellte Fläche ist ein hyperbolisches oder geradliniges oder einschaliges Hyperboloid.

b. $A < 0.$ [5])

α. $A_{33,44} > 0,\ a_{11} A_{44} > 0.$

Die Oberfläche ist ein Ellipsoid.

---

[1]) Vergl. pag. 30, (3) und 31, (3') dieser Arbeit.

[2]) Plücker. System d. Geom. d. Raumes, pag. 75—78.

[3]) ebenda, pag. 73.

[4]) ebenda, pag. 59.

[5]) ebenda, pag. 76.

Die vollständigen Bedingungen sind außerdem:

$$A_{11,44} > 0,\ A_{22,44} > 0$$ [1],

$$A_{44},\ a_{11},\ a_{22},\ a_{33}$$

haben dasselbe Vorzeichen.

β. nicht zugleich $A_{33,44} > 0$, $a_{11} A_{44} > 0$ [2].

Die Gleichung (4) ist die eines elliptischen oder zweischaligen Hyperboloids.

II. $A \neq 0$, $A_{44} = 0$ [2].

Die Gleichung (6) wird unbrauchbar. Plücker geht auf die allgemeine Gleichung (4) zurück und bringt diese auf die Form

$$7)\quad a_{11} x^2 + \frac{A_{33,44}}{a_{11}} y^2 + 2 a_{14} x + 2 a_{24} y + 2 a_{34} z + a_{44} = 0,$$

von der aus er sofort die folgende Teilung vornimmt:

a. $A_{33,44} < 0$

b. $A_{33,44} > 0$.

Die Gleichung (4) stellt im Falle (a) ein hyperbolisches, im Fall (b) ein elliptisches Paraboloid dar. Die notwendigen Bedingungen sind außer den obigen im ersten Fall:

$$A_{11,44} < 0,\ A_{22,44} < 0,\ A > 0$$ [3],

im zweiten:

$$A_{11,44} > 0,\ A_{22,44} > 0,\ A < 0$$ [3];

außerdem stimmen

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33}$$

im Vorzeichen überein.

---

[1]) Plücker, pag. 64.
[2]) ebenda, pag. 76.
[3]) ebenda, pag. 67.

$$\left.\begin{array}{l}\text{III. } A = 0,\ A_{44} \neq 0 \\ \quad \text{a. } A_{33,44} > 0,\ a_{11} A_{44} > 0\end{array}\right\}$$ [1]

Die Bezeichnung „imaginärer Kegel“ findet sich in diesem Zusammenhang bei Plücker nicht; er nennt das Gebilde einen Punkt.

b. nicht zugleich $A_{33,44} > 0,\ a_{11} A_{44} > 0$ [1].

Die Fläche, die die Gleichung (4) darstellt, ist ein Kegel.

In beiden Fällen stimmen

$$A_{11},\ A_{22},\ A_{33},\ A_{44}$$ [2]

im Vorzeichen überein; für den ersten gelten außerdem die vollständigen Bedingungen (I, a, α).

IV. $A = 0,\ A_{44} = 0$ [3];

dazu kommen die notwendigen Bedingungen:

$$A_{14} = 0,\ A_{24} = 0,\ A_{34} = 0$$ [4].

Die Gleichung (6) hat das konstante Glied $\frac{0}{0}$, dessen Wert sich zu $\frac{A_{33}}{A_{33,44}}$ berechnen läßt, so daß die Gleichung die folgende Gestalt annimmt:

$$8)\quad a_{11} x^2 + \frac{A_{33,44}}{a_{11}} y^2 + \frac{A_{33}}{A_{33,44}} = 0$$ [5],

die die Gleichung eines Zylinders ist, der hyperbolisch, imaginär oder reell ist, je nachdem die Bedingungen erfüllt sind [4]:

a. $A_{33,44} < 0$,

b. $A_{33,44} > 0,\ a_{11} A_{33} > 0$,

c. $A_{33,44} > 0,\ a_{11} A_{33} < 0$.

---

[1]) Plücker, pag. 74.
[2]) ebenda, pag. 59.
[3]) ebenda, pag. 77.
[4]) ebenda, pag. 65.
[5]) ebenda, pag. 65, (3).

Als vollständige Bedingungen treten zu den genannten hinzu[1]) im Falle (a):

$$A_{11,44} < 0, \quad A_{22,44} < 0,$$

im Falle (b): $A_{11,44} > 0$, $A_{22,44} > 0$;

$$A_{11}, \; A_{22}, \; A_{33}, \; a_{11}, \; a_{22}, \; a_{33}$$

stimmen im Vorzeichen überein, im Falle (c):

A_{11}, A_{22}, A_{33} stimmen im Vorzeichen überein, ebenso

a_{11}, a_{22}, a_{33}; aber das Vorzeichen der ersteren Größen ist dem der letzteren entgegengesetzt.

d. $A_{33,44} = 0$.

Der Zylinder ist ein parabolischer. Nach den vollständigen Bedingungen[2]) verschwinden alle Unterdeterminanten zweiten Grades von A_{44}; außerdem gelten die zuletzt aufgeführten, vollständigen Bedingungen des Falles (c) auch für den parabolischen Zylinder.

V. $A = 0$, alle Unterdeterminanten dritten Grades von A verschwinden[3]). Die Gleichung (8) geht über in:

$$9) \quad a_{11} x^2 + \frac{A_{33,44}}{a_{11}} y^2 = 0.$$

a. $A_{11,44} > 0$, $A_{22,44} > 0$, $A_{33,44} > 0$[4]),
$A_{22,33} > 0$, $A_{33,11} > 0$, $A_{11,22} > 0$,

a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} stimmen im Vorzeichen überein;

b. $A_{11,44} < 0$, $A_{22,44} < 0$, $A_{33,44} < 0$[4]),
$A_{22,33} < 0$, $A_{33,11} < 0$, $A_{11,22} < 0$.

---

[1]) Plücker, pag. 65.
[2]) ebenda, pag. 67.
[3]) ebenda, pag. 59 und 60.
[4]) ebenda, pag. 60.

Die Fläche zerfällt in ein System von zwei sich schneidenden Ebenen, die im ersten Fall imaginär, im zweiten reell sind.

Die hinreichenden Bedingungen[1]) sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	$A = 0,\ A_{44} = 0,\ A_{33} = 0$
$A_{33,44} > 0$	imaginäres Ebenenpaar
$A_{33,44} < 0$	reelles Ebenenpaar

c. $A_{11,44} = 0,\ A_{22,44} = 0,\ A_{33,44} = 0$ [2])
$A_{11,34} = 0,\ A_{22,34} = 0,\ A_{11,24} = 0,$
$A_{33,24} = 0,\ A_{22,14} = 0,\ A_{33,14} = 0.$

Daß auch

$$A_{23,14},\ A_{31,24},\ A_{12,34}$$

verschwinden, hebt Plücker erst später[3]) hervor.

Die Gleichung (8) geht über in

$$10)\quad a_{11} x^2 + \frac{A_{22,33}}{a_{11}} = 0\ ^{2)},$$

stellt demnach ein paralleles Ebenenpaar dar, das reell oder imaginär ist, je nachdem

α. $A_{22,33} < 0,\ A_{33,11} < 0,\ A_{11,22} < 0$ [4])

oder β. $A_{22,33} > 0,\ A_{33,11} > 0,\ A_{11,22} > 0$ ist.

Als hinreichende Bedingungen bezeichnet Plücker die folgenden[5]):

---

[1]) Plücker, pag. 78.
[2]) ebenda, pag. 66.
[3]) ebenda, pag. 142.
[4]) ebenda, pag. 66; beide Fälle sind verwechselt.
[5]) ebenda, pag. 78.

	$A = 0, A_{44} = 0, A_{33} = 0, A_{33,44} = 0, A_{22,34} = 0$
$A_{22,33} < 0$	reelles paralleles Ebenenpaar
$A_{22,33} > 0$	imaginäres paralleles Ebenenpaar.

VI. $A = 0$, alle Unterdeterminanten dritten und zweiten Grades verschwinden[1]). Die Koëffizienten a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} stimmen im Vorzeichen überein.

Die allgemeine Gleichung stellt ein zusammenfallendes Ebenenpaar dar. Zur genügenden Charakterisierung des Falles reichen die Bedingungen aus[2]):

$$A = 0,\ A_{44} = 0,\ A_{33} = 0,\ A_{33,44} = 0,\ A_{22,33} = 0,\ A_{34,22} = 0.$$

Während Plücker die oben wiedergegebene Diskussion der allgemeinen Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung auf einem anderen Wege wie Cauchy gewinnt, lehnt er in einer zweiten Klassifikation im sechsten Paragraphen seiner Arbeit[3]) ebenso wie dieser seine Erwägungen an die kubische Gleichung für die Hauptaxen der Fläche an.

Um diese Gleichung zu erhalten[4]), schneidet er die Oberfläche (4′) mit einer zunächst beliebigen Ebene

$$z + by + ax = c$$

und fällt vom Mittelpunkt der Fläche das Lot auf diese Ebene, das die Gleichungen hat:

$$x = az,\ y = bz.$$

Dies definiert er als Hauptaxe, wenn es durch den Mittelpunkt der Kurve geht, in der obige Ebene die Fläche schneidet. Diese Definition führt zu den Gleichungen[5]):

---

[1]) Plücker, pag. 60; $A_{23,14}$, $A_{31,24}$, $A_{12,34}$ pag. 142.
[2]) ebenda, pag. 78.
[3]) ebenda, pag. 151 ff.
[4]) ebenda, pag. 143 ff.
[5]) ebenda, pag. 144, (5).

$$11)\begin{cases}(a_{11}a+a_{12}b+a_{13})-(a_{13}a+a_{23}b+a_{33})a=0\\(a_{21}a+a_{22}b+a_{23})-(a_{13}a+a_{23}b+a_{33})b=0,\end{cases}$$

deren Auflösung nach a und b die Richtungen der Hauptaxen liefert. Unter Benutzung dieser Gleichungen leitet Plücker dann zur Bestimmung der Längen der Hauptaxen die Gleichungen ab [1]:

$$12)\begin{cases}(\alpha_{11}-s^2)a+\alpha_{12}b+\alpha_{13}=0\\\alpha_{21}a+(\alpha_{22}-s^2)b+\alpha_{23}=0\\\alpha_{31}a+\alpha_{32}b+(\alpha_{33}-s^2)=0,\end{cases}$$

wo $\alpha_{hi}=-\frac{a_{hi}A_{44}}{A}$ und s^2 der reziproke Wert des Quadrates der halben Axenlänge ist. Die Elimination von a und b aus den Gleichungen (12) führt zu der Gleichung:

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}-s^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\\alpha_{21} & \alpha_{22}-s^2 & \alpha_{23}\\\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-s^2\end{vmatrix}=0\text{ [2]},$$

die in entwickelter Form lautet:

$$13)\begin{cases}s^6+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\frac{A_{44}}{A}s^4+\\(A_{11,44}+A_{22,44}+A_{33,44})\frac{A_{44}{}^2}{A^2}s^2+\frac{A_{44}{}^4}{A^3}=0\text{ [3]}.\end{cases}$$

Wird in diese $s^2=\frac{1}{r^2}$ eingesetzt, geht sie über in die folgende:

$$14)\begin{cases}r^6+(A_{11,44}+A_{22,44}+A_{33,44})\frac{A}{A_{44}{}^2}r^4+\\(a_{11}+a_{22}+a_{33})\frac{A^2}{A_{44}{}^3}r^2+\frac{A^3}{A_{44}{}^4}=0\text{ [4]},\end{cases}$$

die die Werte für die Halbaxenquadrate direkt liefert.

---

[1] Plücker, pag. 151, (4) und (4,a).
[2] ebenda, pag. 151, (5).
[3] ebenda, pag. 151, (7).
[4] ebenda, pag. 151, (8).

Daß die Wurzeln der Gleichungen (13) und (14) reell sind, folgert Plücker aus der Realität der Wurzeln der Gleichungen (11)[1].

Die Klassifikation nun, die Plücker auf Grund der Gleichung (13) resp. (14) gibt, ist die folgende[2]:

$$\text{I. } A \neq 0,$$

$$\text{a. } A > 0,$$

$$\alpha.\ A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} > 0,$$

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, A_{44} > 0.$$

Die Fläche ist imaginär.

β. sind nicht zugleich beide Bedingungen (α) erfüllt, stellt die allgemeine Gleichung ein einschaliges Hyperboloid dar.

$$\text{b. } A < 0,$$

$$\alpha.\ A_{11,44} + A_{22,44} + A_{33,44} > 0,$$

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33})\, A_{44} > 0.$$

Die Gleichung (1) ist die eines Ellipsoids.

β. werden die beiden Bedingungen (α) nicht gleichzeitig erfüllt, ist die durch die allgemeine Gleichung dargestellte Fläche ein zweischaliges Hyperboloid.

$$\text{II. } A = 0.$$

Die Fläche ist ein Kegel oder ein Punkt.

$$\text{III. } A = 0,\ A_{44} = 0.$$

Der unbestimmte Koëffizient $\frac{A_{44}}{A}$ der Gleichung (13) wird gleich $\frac{A_{33,44}}{A_{33}}$[3] und demnach die Gleichung (13) die folgende:

---

[1]) vergl. Plücker, pag. 144.

[2]) ebenda, pag. 151—153.

[3]) ebenda, pag. 137.

$$15)\left\{\begin{array}{l} s^4+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\dfrac{A_{33,44}}{A_{33}}s^2+ \\ (A_{11,44}+A_{22,44}+A_{33,44})\left(\dfrac{A_{33,44}}{A_{33}}\right)^2=0 \end{array}\right.$$ [1]).

Plücker übergeht hier den hyperbolischen Zylinder und betrachtet nur den elliptischen, für den die beiden Werte s^2 der Gleichung (15) gleiche Vorzeichen haben. Die Bedingung dafür ist:

$$A_{11,44}+A_{22,44}+A_{33,44}>0.$$

Je nachdem außerdem

$$\text{a. } (a_{11}+a_{22}+a_{33})\frac{A_{33,44}}{A_{33}}<0 \text{ oder}$$

$$\text{b. } (a_{11}+a_{22}+a_{33})\frac{A_{33,44}}{A_{33}}>0 \text{ ist,}$$

ist der Zylinder reell oder imaginär.

$$\text{IV. } A=0,\ A_{44}=0,\ A_{33}=0.$$

Die beiden Werte s^2 der Gleichung (15) werden unendlich groß, die Axen verschwinden, der Zylinder zerfällt in ein System von zwei reellen Ebenen oder eine gerade Linie.

$$\text{V. } A=0,\ A_{44}=0,\ A_{33}=0,\ A_{33,44}=0.$$

Die unbestimmte Größe $\frac{A_{33,44}}{A_{33}}$ der Gleichung (15) erhält den Wert $\frac{A_{22,33}}{a_{11}}$. Da mit $A_{33,44}$ auch $A_{11,44}$ und $A_{22,44}$ verschwinden, geht die Gleichung (15) über in:

$$16)\ s^2+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\frac{A_{22,33}}{a_{11}}=0$$ [2]).

[1]) Plücker, pag. 152, (10).
[2]) ebenda, pag. 153, (12).

Zwei Axen der Fläche werden unendlich, die Fläche ist ein System von zwei reellen oder imaginären oder zusammenfallenden parallelen Ebenen.

Plücker weist gelegentlich[1]) darauf hin, daß die Bedingungen, die er im Anschluß an die kubische Gleichung erhält, aus den früher gewonnenen hervorgehen.

Da er im zweiten Paragraphen bereits eine vollständige Klassifikation gegeben hat, führt er sie hier nicht wieder vollständig durch.

Ein Fortschritt Cauchy gegenüber ist es nun, daß Plücker die homogenen Koordinaten einführt, die er mit p, q, r, s bezeichnet. Indem er die durch reelle Kollineation verwandten Flächen zusammenfaßt, gibt er die folgende Klassifikation[2]):

I. $A \neq 0$,

a. $A > 0$,

α. $A_{33,44} > 0$, $a_{11} A_{44} > 0$.

Die Fläche ist imaginär.

β. nicht zugleich $A_{33,44} > 0$, $a_{11} A_{44} > 0$.

Die Fläche ist geradlinig.

b. $A < 0$.

Die Fläche ist nicht geradlinig.

II. $A = 0$.

Es ergeben sich zwei koordinierte Fälle, die allgemeine Gleichung stellt einen Punkt oder einen Kegel dar, je nachdem

a. $A_{33,44} > 0$, $a_{11} A_{44} > 0$ ist oder

b. nicht gleichzeitig beide Bedingungen erfüllt sind.

---

[1]) Plücker, pag. 152, Anmerkung.

[2]) ebenda, pag. 73—75.

$$\text{III.}\quad A = 0,\ A_{44} = 0,\ A_{33} = 0,$$
$$\text{a.}\quad A_{33,44} < 0,$$
$$\text{b.}\quad A_{33,44} > 0.$$

Die Fläche degeneriert in ein System von zwei Ebenen, die im ersten Fall reell, im zweiten imaginär sind.

$$\text{IV.}\quad A = 0,\ A_{44} = 0,\ A_{33} = 0,\ A_{33,44} = 0,\ A_{22,33} = 0,$$
$$A_{34,22} = 0.$$

Die allgemeine Gleichung stellt zwei zusammenfallende Ebenen dar.

Ein weiteres Verdienst Plücker's ist es, daß er die Ebenenkoordinaten eingeführt und die allgemeine Gleichung der Oberflächen zweiter Klasse diskutiert hat. Indem er zunächst wieder die reell kollinear verwandten Flächen zusammenfaßt, klassifiziert er[1]):

$$\text{I.}\quad A \neq 0.$$

Die sich hier ergebenden Flächen sind dieselben, wie sie sich für den entsprechenden Fall aus der allgemeinen Gleichung in homogenen Punktkoordinaten ergaben.

$$\text{II.}\quad A = 0.$$

Die allgemeine Gleichung in homogenen Ebenenkoordinaten stellt eine reelle oder imaginäre Kurve zweiter Klasse dar.

$$\text{III.}\quad A = 0,\ A_{44} = 0,\ A_{33} = 0.$$

Die Kurve zerfällt in ein System von zwei reellen oder imaginären Punkten.

$$\text{IV.}\quad A_{23,44} = 0,\ A_{31,44} = 0,\ A_{12,44} = 0,$$
$$A_{14,33} = 0,\ A_{12,33} = 0,\ A_{13,22} = 0\ -$$

Plücker wählt hier aus den vollständigen Bedingungen andere sechs aus wie für den entsprechenden Fall der

---

[1]) Plücker, pag. 79—80.

Oberflächengleichung zweiter Ordnung —, die beiden Punkte fallen zusammen.

In einer zweiten Klassifikation der Oberflächen zweiter Klasse[1]) in Anlehnung an die kubische Gleichung für die Hauptaxen der Fläche trennt Plücker durch Bedingungen zwischen den Konstanten der ursprünglichen Gleichung in Ebenenkoordinaten, die er mit t, u, v, w bezeichnet, auch die Flächen voneinander, die durch reelle Kollineation verwandt sind. Er erhält zunächst aus der ursprünglichen Gleichung

$$17)\quad \Gamma = a_{11}t^2 + a_{22}u^2 + a_{33}v^2 + 2a_{23}uv + 2a_{31}vt + 2a_{12}tu + 2a_{14}tw + 2a_{24}uw + 2a_{34}vw + a_{44}w^2 = 0$$

durch die Koordinatentransformation

$$w = w' - z'v - y'u - x't$$

die folgende:

$$17')\quad A_{22,33}t^2 + A_{33,11}u^2 + A_{11,22}v^2 - 2A_{23,11}uv - 2A_{31,22}vt - 2A_{12,33}tu + a_{44}{}^2w^2 = 0,$$

wenn der Akzent bei w wieder fortgelassen und wenn angenommen wird:

$$18)\quad x' = \frac{a_{14}}{a_{44}},\ y' = \frac{a_{24}}{a_{44}},\ z' = \frac{a_{34}}{a_{44}},$$

oder

$$17'')\quad \alpha_{11}t^2 + \alpha_{22}u^2 + \alpha_{33}v^2 + 2\alpha_{23}uv + 2\alpha_{31}vt + 2\alpha_{12}tu = w^2\ ^{2)},$$

wenn

$$\alpha_{11} = -\frac{A_{22,33}}{a_{44}{}^2},\ \alpha_{22} = -\frac{A_{33,11}}{a_{44}{}^2},\ \alpha_{33} = -\frac{A_{11,22}}{a_{44}{}^2},$$

$$\alpha_{23} = \frac{A_{23,11}}{a_{44}{}^2},\ \alpha_{31} = \frac{A_{31,22}}{a_{44}{}^2},\ \alpha_{12} = \frac{A_{12,33}}{a_{44}{}^2}$$

gesetzt ist.

[1]) Plücker, pag. 191 ff.

[2]) ebenda, pag. 197, (2).

Um die Gleichungen für die Richtung der Hauptaxen zu erhalten, schneidet Plücker die Oberfläche mit einer Ebene

$$t'x + u'y + v'z = 0$$

und definiert sie als Hauptschnitt, wenn die Richtung nach dem Pol dieser Ebene senkrecht zu ihr steht. Für die Richtung der Hauptaxen ergeben sich demnach die Gleichungen:

$$19)\quad \begin{cases} \left(\alpha_{11}\frac{t'}{v'} + \alpha_{12}\frac{u'}{v'} + \alpha_{13}\right) \\ \quad - \left(\alpha_{31}\frac{t'}{v'} + \alpha_{32}\frac{u'}{v'} + \alpha_{33}\right)\frac{t'}{v'} = 0 \text{ [1]} \\ \left(\alpha_{21}\frac{t'}{v'} + \alpha_{22}\frac{u'}{v'} + \alpha_{23}\right) \\ \quad - \left(\alpha_{31}\frac{t'}{v'} + \alpha_{32}\frac{u'}{v'} + \alpha_{33}\right)\frac{u'}{v'} = 0 \end{cases}$$

und für die Quadrate der Halbaxenlängen:

$$20)\quad \begin{cases} (\alpha_{11} - r^2)t' + \alpha_{12}u' + \alpha_{13}v' = 0 \text{ [2]} \\ \alpha_{21}t' + (\alpha_{22} - r^2)u' + \alpha_{23}v' = 0 \\ \alpha_{31}t' + \alpha_{32}u' + (\alpha_{33} - r^2)v' = 0, \end{cases}$$

aus denen sich durch Elimination von t', u', v' ergibt:

$$21)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - r^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - r^2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - r^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ [3]}$$

oder in entwickelter Form, wenn die Konstanten α_{ih} durch die ursprünglichen ersetzt werden,

[1]) Plücker, pag. 197, (6).
[2]) ebenda, pag. 198, (7).
[3]) ebenda, pag. 198, (8).

$$22)\quad \begin{cases} r^6 + (A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22}) \dfrac{r^4}{a_{44}^{\;2}} \\ + (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \dfrac{r^2}{a_{44}^{\;3}} + \dfrac{A}{a_{44}^{\;4}} = 0 \end{cases}$$ [1]).

An diese kubische Gleichung schließt sich die folgende Klassifikation [2]):

$$\text{I.}\quad A \neq 0,\ a_{44} \neq 0,$$

$$\text{a.}\quad A > 0,$$

$$\alpha.\quad A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22} > 0,$$
$$(A_{11} + A_{22} + A_{33})\, a_{44} > 0,$$

die Gleichung (17) stellt das imaginäre Ellipsoid dar.

β. sind nicht beide Bedingungen (α) erfüllt, ist die Fläche ein einschaliges Hyperboloid.

Die beiden Bedingungen (α) löst Plücker mit Hilfe seiner identischen Relationen in die einzelnen auf:

$$A_{22,33} > 0,\ A_{33,11} > 0,\ A_{11,22} > 0,$$
$$a_{44} A_{11} > 0,\ a_{44} A_{22} > 0,\ a_{44} A_{33} > 0.$$

$$\text{b.}\quad A < 0,$$

$$\alpha.\quad A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22} < 0,$$
$$(A_{11} + A_{22} + A_{33})\, a_{44} > 0,$$

oder: $A_{22,33} < 0,\ A_{33,11} < 0,\ A_{11,22} < 0,$

$$a_{44} A_{11} > 0,\ a_{44} A_{22} > 0,\ a_{44} A_{33} > 0;$$

die durch die Gleichung (17) dargestellte Fläche ist ein Ellipsoid.

β. die Bedingungen (α) sind nicht zugleich erfüllt, die Fläche ist ein zweischaliges Hyperboloid.

$$\text{II.}\quad A = 0.$$

---

[1]) Plücker, pag. 201, (22).
[2]) ebenda, pag. 201—204.

Die Gleichung (22) reduziert sich zu[1]):

$$23)\qquad r^4 + (A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22})\frac{r^2}{a_{44}^2} + \frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{a_{44}^3} = 0;$$

das durch die Gleichung (17) dargestellte Gebilde ist eine ebene Kurve.

a. $(A_{11} + A_{22} + A_{33})\, a_{44} < 0$ oder
$a_{44} A_{11} < 0,\ a_{44} A_{22} < 0,\ a_{44} A_{33} < 0,$

die ebene Kurve ist eine Hyperbel;

b. $(A_{11} + A_{22} + A_{33})\, a_{44} > 0$ oder
$a_{44} A_{11} > 0,\ a_{44} A_{22} > 0,\ a_{44} A_{33} > 0;$

die Kurve ist eine Ellipse und zwar eine reelle, wenn

α. $A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22} < 0$ oder
$A_{22,33} < 0,\ A_{33,11} < 0,\ A_{11,22} < 0,$

eine imaginäre, wenn

β. $A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22} > 0$ oder
$A_{22,33} > 0,\ A_{33,11} > 0,\ A_{11,22} > 0$ ist.

III. $A = 0,\ A_{11} = 0,\ A_{22} = 0,\ A_{33} = 0.$

Die ebene Kurve artet in ein System von zwei Punkten aus, deren halbe Entfernung voneinander aus der Gleichung folgt:

$$24)\ r^2 + \frac{A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22}}{a_{44}^2} = 0$$ [2]),

a. $A_{22,33} < 0,\ A_{33,11} < 0,\ A_{11,22} < 0,$
b. $A_{22,33} > 0,\ A_{33,11} > 0,\ A_{11,22} > 0,$
c. $A_{22,33} = 0,\ A_{33,11} = 0,\ A_{11,22} = 0;$

die Punkte sind reell, imaginär oder fallen zusammen.

---

[1]) Plücker, pag. 202, (28).
[2]) ebenda, pag. 202.

IV. $a_{44} = 0$.

Der Mittelpunkt (18) der Fläche liegt unendlich weit, die Gleichung (17) ist demnach die eines Paraboloids. Die größte Wurzel der Gleichung (22) hat den Wert:

$$r^2 = -\frac{A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22}}{a_{44}^2},$$

die beiden andern ergeben sich aus der Gleichung:

$$25)\quad \begin{cases} (A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22})\, r^4 + \\ (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \dfrac{r^2}{a_{44}} + \dfrac{A}{a_{44}^2} = 0 \text{ [1]}; \end{cases}$$

a. $A > 0$,

das Paraboloid ist hyperbolisch, da

$$A_{22,33} + A_{33,11} + A_{11,22} = -(a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2),$$

also negativ ist,

b. $A < 0$,

das Paraboloid ist ein elliptisches. Insbesondere ist das Paraboloid gleichseitig, wenn

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

ist, ein Rotationsparaboloid, wenn

$$(A_{11} + A_{22} + A_{33})^2 + 4\,(a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2)\, A = 0 \text{ ist.}$$

V. $a_{44} = 0$, $A = 0$.

Das Paraboloid artet in eine Parabel aus, die wieder in ein System von zwei Punkten zerfällt, von denen der eine in gegebener Richtung unendlich weit liegt, wenn außerdem

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 \text{ ist.}$$

[1]) Plücker, pag. 203, (31).

Eine im einzelnen von der oben wiedergegebenen abweichende Klassifikation gibt[1]) Plücker im Anschluß an die transformierte Gleichungsform:

$$26)\ a_{11}\, w^2 + \frac{A_{33,44}}{a_{11}}\, t^2 + \frac{A_{44}}{A_{33,44}}\, u^2 + \frac{A}{A_{44}}\, v^2 = 0.$$

I. $A \neq 0$,

a. $A > 0$.

Das Ergebnis ist dasselbe wie für den entsprechenden Fall der Oberflächen zweiter Ordnung[2]). Anders gestaltet sich die Teilung des folgenden Falles, da Plücker hier die erste Koordinate w als die vierte homogene auffaßt, wie aus den folgenden Entwickelungen hervorgeht.

b. $A < 0$.

α. $A_{33,44} < 0$, $a_{11} A_{44} > 0$[3]);

die Gleichung (26) ist die Gleichung eines Ellipsoids.

β. sind die Bedingungen (α) nicht beide erfüllt, ist die Oberfläche ein zweischaliges Hyperboloid.

II. $A = 0$.

Die Gleichung (26) stellt eine ebene Kurve zweiter Klasse dar.

a. $A_{33,44} > 0$, $a_{11} A_{44} > 0$[4]),

b. $A_{33,44} < 0$, $a_{11} A_{44} > 0$[4]),

c. $a_{11} A_{44} < 0$.

Die Kurve ist den drei Fällen entsprechend imaginär, eine Ellipse oder Hyperbel.

---

[1]) Plücker, pag. 81—87.

[2]) vergl. pag. 44 dieser Arbeit.

[3]) Die Bedingungen hat Plücker nicht in dieser Form ausgesprochen; sie folgen aus seinen Gleichungsformen pag. 81, III und IV seines Systems der Geometrie des Raumes.

[4]) beide Fälle sind bei Plücker verwechselt.

III. $A = 0$, alle Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden.

$$\text{a. } A_{33,44} < 0,$$
$$\text{b. } A_{33,44} > 0.$$

Die ebene Kurve zerfällt in ein System von zwei reellen oder imaginären Punkten.

IV. $A = 0$, die Unterdeterminanten dritten und zweiten Grades verschwinden.

Die beiden Punkte fallen zusammen.

$$\text{V. } A_{44} = 0, \; A \neq 0 \text{ oder}$$
$$A_{33,44} = 0, \; A_{44} \neq 0.$$

Da die Gleichung (26) ihre Bedeutung verliert, bringt Plücker sie auf eine Form, so daß die Koëffizienten einen endlichen Wert erhalten, nämlich:

$$a_{11} w^2 + \frac{A_{33,44}}{a_{11}} t^2 + (2 a_{14} w + 2 a_{24} t + 2 a_{34} u + a_{44} v) v = 0$$

oder:

$$a_{11} w^2 + (2 a_{13} w + 2 a_{23} t + 2 a_{33} u) u + \frac{A}{A_{44}} v^2 = 0.$$

Beide Gleichungen stellen ein Hyperboloid dar und zwar ein einschaliges, wenn

$$\text{a. } A_{33,44} < 0 \text{ resp. } A > 0,$$

ein zweischaliges, wenn

$$\text{b. } A_{33,44} > 0 \text{ resp. } A < 0 \text{ ist.}$$

Die Bedingung $A > 0$ im Fall (a) erklärt sich daraus, daß mit dem Verschwinden von $A_{33,44}$ das Produkt $a_{11} A_{44}$ negativ wird.

Kommen schließlich zu den an die Spitze gestellten Bedingungen hinzu:

$$\text{c. } A_{33,44} = 0 \text{ resp. } A = 0,$$

so stellt die Gleichung (26) eine Hyperbel dar.

VI. $a_{11} = 0$.

Plücker ersetzt die Gleichung (26) durch die folgende:

$$(2 a_{12} w + a_{22} t) t + \frac{A_{44}}{A_{33,44}} u^2 + \frac{A}{A_{44}} v^2 = 0,$$

die ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid darstellt, je nachdem

a. $A_{33,44} A > 0$ oder

b. $A_{33,44} A < 0$ ist.

Falls auch

c. $A = 0$ wird,

degeneriert das Paraboloid in eine Parabel. Wenn schließlich

d. A und die Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden, zerfällt die Parabel in ein System von zwei Punkten, von denen der eine nach gegebener Richtung unendlich weit liegt.

Verschwindet außer a_{11} auch $A_{33,44}$, wird kein besonderer Fall erhalten, da eine andere Axenannahme bewirkt, daß die Gleichung (26) ihre Gültigkeit wieder erhält.

VII. $a_{11} = 0,\ A_{33,44} = 0,\ A_{22,44} = 0,\ A_{22,33} = 0$

oder: $a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 0,\ a_{14} = 0$.

Die Gleichung (26) reduziert sich zu

$$a_{22} t^2 + \frac{A_{11,44}}{a_{22}} u^2 + \frac{A_{11}}{A_{11,44}} v^2 = 0,$$

der Gleichung eines Kegelschnitts in der unendlich fernen Ebene. In Verbindung mit der Gleichung

$$w = 0$$

stellt die letzte Gleichung einen Kegel dar, dessen Spitze $w = 0$ ist; er ist imaginär, wenn

a. $A_{11,44} > 0$, $a_{22} A_{11} > 0$ ist,

reell, wenn

b. nicht zugleich beide Bedingungen erfüllt sind.

Wird insbesondere auch

$$\text{c.} \quad A_{11} = 0,$$

so zerfällt der Kegelschnitt in zwei nach bestimmten Richtungen unendlich weit liegende Punkte, die reell oder imaginär sind, je nachdem

α. $A_{11,44} < 0$ oder

β. $A_{11,44} > 0$ ist.

Wird schließlich auch

$$\gamma. \quad A_{11,44} = 0, \; A_{22,33} = 0,$$

so reduziert sich die Gleichung des unendlich fernen Kegelschnitts zu

$$t^2 = 0,$$

stellt demnach ein System von zwei zusammenfallenden Punkten dar, die nach gegebener Richtung unendlich weit liegen.

III. Die Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades bei Hesse.

Wie eine Betrachtung der beiden ersten Hauptteile der vorliegenden Arbeit ergibt, ist die Klassifikation der Oberflächen zweiter Ordnung resp. zweiter Klasse bei Cauchy und Plücker eine völlig ausreichende. Doch erstreckt sich die Vollkommenheit ihrer Darstellung nur auf den Inhalt und die Methode; die analytische Gestalt, in die sie ihre Resultate kleiden, besitzen meist nicht jene der Natur der algebraischen Probleme angepaßte, elegante Form, an welche wir besonders seit Hesse gewöhnt sind, der den Ergebnissen eine übersichtlichere, äußere Form gab, dadurch daß er die Determinantentheorie auf die analytische Geometrie anwendete. Zum bessern Verständnis der klassischen Untersuchungen Hesse's wird eine kurze Entwickelungsgeschichte der Determinantentheorie von Nutzen sein.

Die ersten Anzeichen einer solchen treten bereits bei Leibniz auf[1]), in bestimmterer Form bei Cramer[2]) von neuem, dann ferner bei Bézout[3]), Laplace[4]),

---

[1]) Leibnizens mathemat. Schriften, herausgegeben von Gerhardt. Band 2, pag. 238.

[2]) Cramer. Introduction à l'analyse des courbes algébriques; pag. 657 ff.

[3]) Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1764, pag. 288 ff.

[4]) Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1772, seconde partie, pag. 294.

Vandermonde[1]), Lagrange[2]), Rothe[3]), Gauß[4]). Doch betreffen alle von diesen gemachten Versuche und Andeutungen nur spezielle Fälle und zwar meistens die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen oder die Elimination von Unbekannten aus demselben. Erst Lagrange wendet die Theorie auch auf Aufgaben aus der analytischen Geometrie und endlich Gauß bei seinen Untersuchungen zahlentheoretischer Natur an. Aber bei keinem der genannten Forscher finden sich der Determinantenbegriff und die Eigenschaften der Determinanten in ihrem systematischen Zusammenhang entwickelt und als besondere Lehre vorausgeschickt.

Erst Cauchy hat dem formlos hin- und herzerstreuten Material Form und hierdurch auch Wert gegeben und kann deshalb wohl mit Recht als der eigentliche Begründer der Determinantentheorie hingestellt werden[5]).

Er geht in seiner Abhandlung[6]) aus von der Funktion

$$D_n = S(\pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}),$$

die auch in neueren Werken noch häufig als Ausgangsfunktion der Theorie dient; das Operationssymbol erstreckt sich auf die ersten Indizes, die einzelnen Glieder der Summe erhalten das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Zahl der in dem betreffenden Ausdruck enthaltenen zyklischen Substitutionen gerade oder ungerade

---

[1]) Histoire de l'Académie Royale des Siences. Année 1772, seconde partie, pag. 516 ff.

[2]) Nouv. Mém. de l'Académie Royale de Berlin. Année 1773, pag. 85 und 149 ff.

[3]) Sammlung komb.-anal. Abhandl. II. Teil, pag. 263. Leipzig 1800.

[4]) Gauß. Disquis. arithmet., pag. 165 ff.

[5]) Studnicka. A. L. Cauchy als formaler Begründer der Determinantentheorie.

[6]) Journal de l'École royale polytechnique, cahier 17, pag. 29—112.

ist. Die verschiedenen Elemente ordnet dann Cauchy in dem Schema an:

$$S(\pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}) = \begin{cases} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}. \end{cases}$$ [1]

Er leitet einige einfache Determinantensätze ab, beschäftigt sich mit der Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen und entwickelt das Multiplikationstheorem.

Die Cauchy'sche Abhandlung blieb während der ersten Jahrzehnte nach ihrem Erscheinen so unbekannt, daß diese Theorie einer neuen 1841 erschienenen Bearbeitung durch Jakobi[2]) bedurfte, um die mathematische Welt auf diese Erscheinung aufmerksam zu machen. Infolge dieser Anregung erschienen dann mehrere Lehrbücher, die diesen Gegenstand systematisch behandelten, unter denen in erster Linie das schon mehrfach zitierte Lehrbuch von Baltzer zu nennen ist, und Hesse wurde veranlaßt die Ergebnisse in der analytischen Geometrie zu verwenden. Er gibt allerdings in seinen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes" keine ausführliche Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades, wie es Cauchy und Plücker in ihren Werken getan haben, sondern gibt nur in großen Zügen den Gang einer solchen Klassifikation an. Er legt als die allgemeine Gleichung für die Oberflächen zweiter Ordnung zu grunde[3]):

---

[1]) Journal de l'École royale polytechnique, cahier 17, pag. 53.

[2]) Crelle's Journal, Band XXII. pag. 285 ff. und 319 ff. De formatione et proprietatibus Determinantium und de Determinantibus functionalibus.

[3]) Hesse. Vorlesungen über anal. Geom. des Raumes, pag. 159—163.

$$1)\quad f(x, y, z, p) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + a_{33}p^2 + 2a_{01}xy + 2a_{02}xz + 2a_{03}xp + 2a_{12}yz + 2a_{13}yp + 2a_{23}zp = 0$$

und stellt die Gleichungen auf, die den Mittelpunkt der Oberfläche bestimmen. Diese löst er nicht weiter auf, sondern gibt nur den den drei Koordinaten $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ gemeinsamen Nenner an. Je nachdem dieser von 0 verschieden ist oder verschwindet, entstehen Flächen mit oder ohne Mittelpunkt. Dann gibt er die Hauptdeterminante A an; verschwindet diese, liegt der Mittelpunkt auf der Fläche, die demnach ein Kegel ist. Dieser zerfällt in ein Ebenenpaar, wenn die Funktion f sich in zwei lineare Faktoren zerlegen läßt.

An anderer Stelle[1]) leitet Hesse die kubische Gleichung ab, von der die Hauptaxen abhängen, indem er eine Koordinatentransformation vornimmt

$$x = aX + a'Y + a''Z$$
$$y = bX + b'Y + b''Z$$
$$z = cX + c'Y + c''Z;$$

die Richtungskosinus werden so bestimmt, daß die Koëffizienten der Produkte yz, zx, xy verschwinden. Sind die drei Werte der kubischen Gleichung von 0 verschieden, ist die Fläche (1) je nach den Vorzeichen der Wurzeln ein reelles oder imaginäres Ellipsoid, ein Hyperboloid mit einer oder zwei Mantelflächen oder ein reeller oder imaginärer Kegel. Verschwindet eine Wurzel, stellt die Gleichung (1) ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid dar und, wenn zwei Wurzeln verschwinden, einen parabolischen Zylinder. Die Zeichenfolge der kubischen resp. quadratischen Gleichung gibt Aufschluß darüber, wann die eine oder andere Oberfläche erhalten wird.

[1]) Hesse, pag. 242 ff.

Ein elliptischer oder hyperbolischer Zylinder wird durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellt, wenn in der Gleichung für das ein- oder zweischalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ resp.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

der Faktor $\frac{1}{c^2}$ verschwindet.

Die allgemeine Gleichung für die Oberflächen zweiter Klasse[1]) lautet bei Hesse:

$$\begin{aligned} 2)\ F(u, v, w, r) = & e_{00} u^2 + e_{11} v^2 + e_{22} w^2 + e_{33} r^2 \\ & + 2 e_{01} uv + 2 e_{02} uw + 2 e_{03} ur \\ & + 2 e_{12} vw + 2 e_{13} vr + 2 e_{23} wr = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung des Mittelpunktes ist:

$$e_{30} u + e_{31} v + e_{32} w + e_{33} r = 0,$$

folglich seine Koordinaten:

$$a = \frac{e_{30}}{e_{33}}, \quad b = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad c = \frac{e_{32}}{e_{33}}.$$

Der Mittelpunkt ist endlich, wenn e_{33} von 0 verschieden ist, dagegen fällt er ins Unendliche, wenn

$$e_{33} = 0 \text{ ist.}$$

Soweit die Angaben Hesse's über die Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades, auf Grund deren eine vollständige Angabe der Klassifikation leicht durchzuführen ist, die mit der von Cauchy und Plücker gegebenen übereinstimmen würde. Eine solche Klassifikation, bei der die Bedingungen in Determinanten ausgedrückt sind, findet sich vollständig durchgeführt in den „Vorlesungen" von Clebsch[2]).

---

[1]) Hesse, pag. 159—160.

[2]) Clebsch-Lindemann. Vorlesungen über Geometrie, 2. Band, 1. Teil, pag. 161—163 und pag. 200—206.

Wird das Gesamtergebnis der vorliegenden Arbeit noch einmal kurz zusammengefaßt, so ist es das folgende:

Eine Klassifikation der Oberflächen zweiter Ordnung hat schon Cauchy vollständig durchgeführt; es fehlen bei Cauchy noch die homogenen Koordinaten, die Plücker einführt. Bei Plücker tritt außerdem die Oberfläche zweiter Klasse auf. Durch Verbindung der Determinanten und der homogenen Schreibweise für die Gleichungen der Flächen erreicht schließlich Hesse die vollkommenere Form der Bedingungen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Staude, für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für die freundliche Unterstützung, die mir zuteil geworden ist, auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.